试题编号：435　　　试题名称：高等代数

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一（20 分）. 设 f(x), g(x)为数域 P 上的多项式，求证：(f(x), g(x))=1 的充要条件是(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1.

二（20 分）. 当 $x \neq a_i$ (i=1, 2, …, n)时，计算下列行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

三（20 分）. 证明：A 是正定或半正定实对称矩阵的充要条件是，存在实矩阵 S 使 $A=S^TS$。其中 S^T 表示 S 的转置矩阵。

四（20 分）. 设 A，B 都是正交矩阵，若$|A|+|B|=0$，证明以下结论：

(1) $A+B=A(A^T+B^T)B$;

(2) A+B 是降秩矩阵。

五（20 分）. 设 f 与 g 是 n 维向量空间 V 中的两个线性变换，而且 f 是幂等的（即 $f^2=f$）。求证：

(1) $\ker f=\{x-f(x)\mid x\in V\}$;

(2) $V=\ker f\oplus \mathrm{Im}\, f$;

(3) 如果 ker f 与 Im f 都是 g 的不变子空间，则 fg=gf。

六（20 分）. 设向量组α_1，α_2，…，α_s 线性无关，α_1，α_2，…，α_s，β，γ 线性相关，而且β与γ都不能由向量组α_1，α_2，…，α_s 线性表示。证明：α_1，α_2，…，α_s，β与α_1，α_2，…，α_s，γ 等价。

七（20 分）. 设 A 为 n 阶实矩阵，R_n为实数域 R 上 n 维列向量空间, $W=\{Y\in R_n \mid X^TAY=0$, 对一切 $X\in R_n$ 均成立$\}$, $W_1=\{Y\in R_n\mid AY=0\}$, 则下列结论成立。

(1) $W=W_1$, 且 W 为 R_n 的子空间;

(2) $\dim W+R(A)=n$。其中 dim W 表示子空间 W 的维数。

八（10 分）. 求复数域上矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

的若当标准形。

九（10 分）．当 a≠0 时，讨论 b 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 2x = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多解时, 并说明解集合的几何意义。