

试题编号：328 试题名称：数学分析

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一. 计算题（每小题 8 分，共 72 分）

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right)$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x - 2y) \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$

4. $\int_0^{2a} x \sqrt{2ax - x^2} dx$

5. $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$

6. $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 - y^2)^{10} dx dy$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$

8. $\oint_{\Gamma} (x^2 + 2z) ds, \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$

9. $\oiint_{\Sigma} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad \Sigma \text{ 为 } z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1, z = 2 \text{ 所围成立体的表面}$

外侧。

二. （8 分）叙述 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的 Cauchy 准则，并用以说明函数 $y = \sin x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时没有极限。

三. (14 分)

1. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 的敛散性.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ 之和.

四. (14 分)

1. 试判断 $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^2+y^2} dx$ 在 $y \geq a > 0$ 时是否一致收敛? 说明理由.

2. 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ 在 $(0, \pi]$ 中不一致收敛.

五. (16 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($a < b$) 上有连续的导函数, $f(a) = 0$,

证明: 1. $\int_a^b [f(x)]^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$.

2. $\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$, 且等号成立时, 有

$f(x) = c(x-a)$, c 为某一定值.

六. (10 分) 试问方程 $x^3 - 3px + q = 0$ 在实数域内有几个实根?

七. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0, 0 < x < 1$ 时 $f(x) > 0$,

证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

八. (8 分) 若平面曲线 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 光滑, 即 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 在

$[\alpha, \beta]$ 上连续，则此曲线的面积为零。

