试题编号：422　　试题名称：高等代数

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一 填充题（6×5 分=30 分）

1．多项式 $x^3-6x^2+15x-14$ 的有理根为 _______。

2．$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵为 _______。

3．已知二阶方阵 A 的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=3$，对应的特征向量分别为 $X_1=(1，2)'$，$X_2=(3，4)'$。则 A= _________。

4．当 a= _____时，向量组$\alpha_1=(a，1，3，11)$，$\alpha_2=(1，-3，1，3)$，$\alpha_3=(1，2，1，4)$的秩为 2。

5．设 $f(x_1，x_2，x_3) = x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则λ的取值范围是 _______。

6．设在空间 $P[x]_n$ 中，变换 **A** 为 $f(x)\to f(x+1)-f(x)$。求变换 **A** 在基$\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_i=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$ (i=1，2，…，n−1)下的矩阵。

二（15 分）证明：x^m-1 整除 x^n-1 的充要条件是 m 整除 n。

三（15 分）设 a_{ij}，b_{ij} 分别为 n 阶行列式 detA，detB 的元素，而且满足 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}-a_{ij}$(i=1，2，…，n；j=1，2，…，n)，求证 $\det B=(-1)^{m}(n-1)\det A$。

四（15 分）设 n×m 实矩阵 A 的秩为 m，B 为 n 阶正定矩阵，证明矩阵 $A'BA$ 可逆。这里 A'是 A 的转置矩阵。

五（15 分）设 V 是一个 n 维欧氏空间，α_1，α_2，…，α_n 是 V 的一个标准正交基，σ是 V 的一个线性变换，$A=(a_{ij})$是σ在这个基下的矩阵，证明：$(\sigma\alpha_i，\alpha_j)=a_{ji}$，i，j=1，2，…，n。

六（15 分）若 $D=(d_{ij})_{n\times n}$，定义 $\mathrm{Tr}D=\sum_{i=1}^{n} d_{ii}$。设 $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（1） 求 $\mathrm{Tr}A^k$，k=1，2，…。　（2） 证明 A 不相似于任一对角阵。

七（15 分）实数$\lambda\geq 0$ 是 $A\bar{A}$ 的特征值的充要条件是存在非零向量 X，使 $A\bar{X}=\sqrt{\lambda}X$。这里 A 是复方阵，$\bar{A}$ 是 A 的共轭阵。

八（15 分）设η_0是线性方程组的一个解，η_1，η_2…，η_t是它的导出方程组的一个基础解系，令$\gamma_1=\eta_0$，$\gamma_2=\eta_1+\eta_0$，…，$\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0$，证明线性方程组的任一个解$\gamma$，都可表成$\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\dots+u_{t+1}\gamma_{t+1}$，其中 $u_1+u_2+\dots+u_{t+1}=1$。

九（15 分）设 f(x)是数域 P 上的多项式，而且有 $f(x)=\alpha(x)\beta(x)$，$(\alpha(x)，\beta(x))=1$。又设 V 为 P 上 n 维线性空间，**T** 为 V 的一个线性变换，K 为 f(**T**)的核，W_1 为α(**T**)的核，W_2 为β(**T**)的核，求证：$K=W_1\oplus W_2$。