试题编号：311　　试题名称：高等数学

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一．选择题（每小题 4 分，共 40 分。每题只有一个正确答案）

1．下列结论中正确的是　（　　）

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x=\sqrt{e}$.　　（B）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(C) 若 $f(x),g(x)$在x_0的某邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

(D)曲线 $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$ 有一条水平渐近线和两条铅直渐近线.

2．若 $x\to 0$时，$e^{\sin x}-e^x$是x^n 的高阶无穷小，则正整数 n 的最大取值是 （　　）

(A)1.　　（B）2.　　(C)3.　　(D)4.

3.下列函数中在其定义域内处处可导的是 （　　）

(A) $f(x)=x^{4/5}$　　（B）$f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\ge 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\ge 0\\ 1-e^x, & x<0\end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\ge 0\\ \cos x-1, & x<0\end{cases}$

4.下列命题中正确的是（　　）

（A）定义在$(-\infty,\infty)$上任何偶函数的原函数一定是奇函数.

（B）对任何定义在$(-\infty,\infty)$上的可导函数 $f(x)$，一定有 $\int_0^x f'(t)dt=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'$.

（C）若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 一定连续.

（D）若 $f(x)$ 是区间[0, 1]上的连续函数，则 $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\le\int_0^1 f^2(x)dx$.

5. 二阶线性微分方程 $y''+y'+ye^{-2x}=0$ 的通解是 （　　），其中 C_1,C_2 是任意常数.

(A)　$C_1\cos x+C_2\sin x$,　　(B)　$C_1\cos e^{-x}+C_2\sin e^{-x}$,

(C)　$C_1\cos e^{-x}+C_2x\sin e^{-x}$,　　(D) $C_1e^x+C_2e^{-x}$。

6．设 A、B 为 n 阶方阵，且 $A\neq 0$，满足 $AB=0$，则（　　　　）

(A) $(A-B)^2=A^2+B^2$　　(B) $B=0$

(C) $|B|=0$ 或 $|A|=0$　　(D) $BA=0$

7．设 $A_{5\times 4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，已知 $\xi_1=(1,1,1,1)^T,\xi_2=(0,1,0,1)^T$ 是 $AX=O$ 的基础解系，则（　　　　）

(A) α_1,α_3 线性无关；　　(B) α_2,α_4 线性无关；

(C) α_1 能被 α_3,α_4 线性表示；　　(D) α_4 不能被 α_2,α_3 线性表示。

8. 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是（　　　　）

(A) $\overline{A}$与$\overline{B}$ 不相容；　　(B) $\overline{A}$与$\overline{B}$ 相容；

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

9．给 K 只犬注射狂犬疫苗，则其中某只犬总在另一只犬前面注射的概率为（　　　　）

（A）$\frac{1}{k}$；　（B）$\frac{1}{2}$；　（C）$\frac{1}{k(k-1)}$；　（D）$\frac{2}{k}$.

10. 设 X 服从参数 λ 的指数分布，且已知 $E(X^2)=72$，则 $\lambda=$（　　　　）

（A）6　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{6\sqrt{2}}$　（D）$6\sqrt{2}$

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left[\frac{\sin(1+x^2+\cos x)}{(1+x^2)\cos x}+x\right]dx=$____________________.

2．曲线 $y=\int_0^x(x-t+1)e^{-\sin t}dt$ 在点 $x=0$ 处的切线方程是__________________.

3．设方程 $y+z=e^{xyz}$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $dz=$____________________.

4．设四阶线性方程组 $AX=b$ 有解 $\eta_1=(1,1,2,0)^T,\eta_2=(2,-1,0,3)^T,\eta_3=(4,1,4,3)^T$，则在 $R(A)=$______时，我们能由此给出线性方程组 $AX=b$ 的通解为____________。

5．设四阶矩阵 A 与 B 相似，A 的特征值为 $\lambda=1,2,3,-1$，则 $|B^*+I|=$______，其中 B^* 为矩阵 B 的伴随矩阵。

6. 设 P(A)=0.5，P(B)=0.25，$P(A\,|\,\overline{B})=0.4$，则 P(AB)=_____，$P(A\,|\,A\cup\overline{B})$=_____.

三、解答题（本题共 10 小题，满分 86 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1^x+2^x+\cdots+2006^x}{2006}\right)^{\frac{2006}{x}}$．（6 分）

2．若函数 $f(x)$ 的一个原函数就是 $f(x)$ 本身，且 $f'(0)=1$,求 $\int e^x f(x)dx$ （6 分）

3．计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{(\arctan^2 x)e^{-\arctan^2 x}}{1+x^2}dx$．（6 分）

4．设函数 $f(x)$ 在 [0，3] 上连续，在（0，3）内可导，且 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，$3f(1)+f(2)+2f(3)=3$．证明：存在一点 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$．（8 分）

5．计算二重积分 $\iint\limits_D \max(x^2,y^2)dxdy$，其中 D 表示单位圆盘：$x^2+y^2\le 1$．（8 分）

6．求内接于椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$ 的长方体的最大体积.（9 分）

7．已知二次型 $f=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$,求正交阵 P ,使通过正交线性变换 $(x,y,z)^T=P(\xi,\eta,\zeta)^T$ 化二次型为标准形 $f=4\xi^2+\eta^2$ （10 分）

8．已知 $\alpha_1=(1,-1,0)^T,\alpha_2=(2,2,1)^T,\alpha_3=(-1,-1,4)^T$，若三阶方阵 A 满足 $A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1-2\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$，求矩阵 A。（11 分）

9. 某电厂由甲乙两台机组并联向一城市供电，当一台机组发生故障时，另一机组能在这段时间满足城市全部用电需求的概率为 80%。设每台机组发生故障的概率为 0.2，且它们是否发生故障互相独立。（1）求保证城市供电的概率；（2）求已知电厂机组发生故障时，供电能满足需求的概率。（10 分）

10. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{A}{e^x+e^{-x}},(-\infty<x<+\infty)$，
试求（1）A；
（2）随机变量 X 的数学期望 E(X)和方差 D(X)；
（3）$Y=e^X$ 的概率密度。（12 分）