试题编号：328　　试题名称：数学分析

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

1.计算（每题 8 分，共 80 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right)$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x} t\left[\frac{1}{t}\right]dt}{e^{\sin x}-1}$.

（3）$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$.

（4）$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

（5）$\int_0^1 x(\ln x)^{2006}dx.$

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}.$

（7）已知 $x(t)=\int_1^t u\ln u du, y(t)=\int_1^{t^2} xu\ln u du-\int_2^t\int_3^{u^2} s\ln s ds du$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=e}$.

（8）$\iint\limits_D e^{-y^3}dxdy$， 其中 D 是由 y 轴、直线 $y=1$ 及曲线 $y=\sqrt{x}$ 围成的平面区域.

（9）$I=\iiint\limits_{\Omega}(y+z)dxdydz$,

其中 Ω 是空间中平面 $z=0, z=1$ 及曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=1(a,b>0)$ 所围成的区域.

（10）$I=\int_L\left(x^2+xy\right)dx+\left(xy+y^2\right)dy$, 其中 L 表示逆时针方向左半椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$

$(x\le 0, a>b>0)$.

2.举出满足下列条件的例子，并给予证明. （每小题 10 分，共 30 分）

(1) 定义在 $(0,1)$ 上连续但不一致连续的函数。

(2) 定义在平面 R^2 上一阶偏导数存在但在原点不连续的二元函数.

(3) 定义在$[0,1]$上收敛但不一致收敛的函数列（或函数项级数）.

3.叙述区间套定理及闭区间上连续函数的零点存在定理，并用前者证明后者.（10 分）

4.设函数f在有限闭区间$[a,b]$上连续，$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b (n \ge 3)$，正数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$满足$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$，证明存在$c \in (x_1, x_n)$使得

$$f(c) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

（10 分）

5.设f是定义在区间$[a,b]$上的非负连续可微函数，且$f(a) = f(b)$. 证明存在$\xi \in [a,b]$，使得$|f'(\xi)| < \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$.（10 分）

6.证明（1）积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a+u^2)t} \sin t dt, (a > 0)$$

在$u \in [0, +\infty)$上一致收敛.

（2）积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(a+u^2)t} \sin t du, (a > 0)$$

在$t \in [0, +\infty)$上也一致收敛.

（10 分）