

南京农业大学
2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 422 试题名称: 高等代数

注意: 答题一律答在答题纸上, 答在草稿纸或试卷上一律无效

一. (20 分)

证明: $x^m - 1 \mid x^n - 1$ 当且仅当 $m \mid n$ 。

二. (20 分)

计算下列 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x & x & x & \dots & x \\ x & 1+x & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x & x & x & \dots & 1+x \end{vmatrix}.$$

三. (20 分)

λ 取何值时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_1x_3$ 是负定的。

四. (20 分)

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 则 β 可以唯一地由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

五. (20 分)

设 A 是 $r \times r$ 矩阵, B 是 $r \times n$ 矩阵, B 的秩为 r , 则 $AB = 0$ 当且仅当 $A = 0$ 。

六. (20 分)

设 A, B 都是正交矩阵, 若 $|A| + |B| = 0$, 证明以下结论:

(1) $A + B = A(A^T + B^T)B$;

南京农业大学
2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

(2) $A + B$ 是降秩矩阵。

这里, A^T 表示 A 的转置矩阵。

七. (20 分)

设 $M_n(R)$ 表示实数域 R 上的 n 阶矩阵的全体, 则 $M_n(R)$ 是 R 上的线性空间。 设

$$W_1 = \left\{ A = (a_{ij}) \in M_n(R) \mid \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0 \right\}, \quad W_2 = \{ kE_n \mid k \in R \},$$

其中 E_n 表示 n 阶单位矩阵, 则下列结论成立。

(1) W_1, W_2 都是 $M_n(R)$ 的线性子空间;

(2) $M_n(R) = W_1 \oplus W_2$ 。

八. (10 分)

当 $a \neq 0$ 时, 讨论 b 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 2x = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 2b-1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多解时, 并说明解集合的几何意义。