南京农业大学
2007年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：628　　试题名称：数学分析

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

1. 计算题（每题6分，共60分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$　$(0<\alpha<1)$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x\sin x)^{1/x^2}$.

（3）$\int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx$.

（4）$\int_0^\pi x|\sin nx|dx$　（n是自然数）.

（5）$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$.

（6）若方程$xe^z+yz=2$确定二元隐函数$z=z(x,y)$，求$z\dfrac{\partial z}{\partial x}-e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（7）$\iint\limits_D[x^2-y]dxdy$，　其中$[x^2-y]$表示不超过$x^2-y$的最大整数，$D=[0,1]\times[0,1]$.

（8）$\oint_L 2xdy+ydx$，其中$L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，逆时针方向.

（9）$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外表面.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{1+t^2+x^2}dt$.

2. 讨论函数$y=x\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$上的一致连续性。(10分)

3. 判断下列说法是否正确，并说明理由。(15分)

（1）存在闭区间上有界但Riemann不可积的函数.

（2）若一个二元函数$f(x,y)$在原点（0,0）处的两个二阶混合偏导数存在，它们必定相等.

（3）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

4. 叙述关于实数完备性的确界原理及区间套定理，并用前者证明后者.(10分)

5.（1）将函数 $f(x)=\sin x$ 展开为关于 $x-\dfrac{\pi}{4}$ 的幂级数；（5分）

（2）将函数 $f(x)=\cos x, x\in[0,\pi)$ 展开为周期为 π 的 Fourier 级数，并求级数在 $[-\pi,\pi)$ 上的极限函数. (10分)

6. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

（1）研究函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性.

（2）求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$，并研究它的连续性.

（3）研究函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性.

（4）据理说明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否取得极值. （15分）

7. 验证曲线积分

$$\int_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$

与路径无关，并求 $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ 的经过点(1，2，－1)的原函数.（10分）

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可微，且导函数有界.

（1）函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续.

（2）证明极限 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 都存在.

（3）证明函数 f 在 $(0,1)$ 上有界.

（4）若在 $(0,1)$ 上定义函数列

$$f_1(x)=\int_0^x f(t)dt\,,\ f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)dt,\ \ n=1,2,\cdots.$$

证明函数列 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛.（15分）