南京农业大学
2008年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：822　　试题名称：**高等代数**

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一．填充题（每小题5分，共 20分）

1．多项式x^3+mx+n有重根的条件是______________。

2．已知$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，则矩阵$A=$____________，$|A|=$__________。

3．从矩阵A中划去一行得到B，在矩阵A中增加一行得到C，则它们（A,B,C）的秩之间的关系是________________（由小到大排序）。

4．当m取何值时__________，齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0\\ -x_1+2x_2-3x_3=0\\ x_1-3x_2+mx_3=0\end{cases}$有非零解。

二．（15 分）．设$f(x),g(x)$皆是数域 P 上的多项式，如果$(f(x),g(x))=1$，求证：$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$。

三．（15分）．当$x\neq 1,2,\cdots,n$时，计算下列行列式

$$D_n=.\begin{vmatrix}1 & x & x & . & . & . & x\\ x & 2 & x & . & . & . & x\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ x & x & x & . & . & . & n\end{vmatrix}$$

四．(15分)．设 n×m 实矩阵A的秩为 m，B为 n 阶正定矩阵，证明矩阵A^TBA可逆。这里A^T表示矩阵A的转置矩阵。

五．(20分)．设A,B都是正交矩阵，若$|A|+|B|=0$，证明以下结论：

(1) $A+B=A(A^T+B^T)B$；

(2) $A+B$是降秩矩阵。

六．(20分)．设f与g是n维向量空间V中的两个线性变换，而且f是幂等的（即$f^2=f$）。求证：

(1) $\ker f=\{x-f(x)\,|\,x\in V\}$；

(2) $V=\ker f\oplus \operatorname{Im} f$；

(3) 如果$\ker f$与$\operatorname{Im} f$都是g的不变子空间，则$fg=gf$。

七．(15分)．已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$有相同的秩，证明：

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s$等价。

八．(15分)．用非退化线性变换化下列二次型为标准形：

$x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$.

九．(15分)．讨论a取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+2x_3=2x=1, \\ x_1+(2a-1)x_2+3x_3=1, \\ x_1+ax_2+(a+3)x_3=2a-1, \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解时。