南京农业大学
2009年攻读博士学位研究生入学考试试题

试题编号：3450　　试题名称：代数学引论

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一．　名词解释（每小题 5分，共 20分）

1．正规子群（即,不变子群）

2. 极大理想

3. 环同态基本定理

4. 主理想整环

二．证明题（每小题12分，共 72分）

1．　设ϕ是群G到群H的一个同态。设M和N分别是G和H的非空子集，记$\phi(M)=\{\phi(a)|a\in M\}$，称为$M$在$\phi$之下的象，记$\phi^{-1}(N)=\{a\in G|\phi(a)\in N\}$，称为$N$在$\phi$之下的完全原象。证明：

（1）如果S是G的子群，那么S的象$\phi(S)$是H的子群。

（2）如果T是H的子群，那么T的完全原象$\phi^{-1}(T)$是G的子群。进一步，如果T是H的正规子群，那么$\phi^{-1}(T)$是G的正规子群。

2.　证明：$G\to G$，$g\mapsto g^{-1}$是群G的自同构当且仅当G是交换群。

3．设 H,K是群G的两个子群,如果$|H|=6$, $|K|=35$, 证明：$H\cap K=\{e\}$,其中e群G的单位元。

4．如果环R中每个元素都满足$x^2=x$，则对于R中任意元素x,y有$x+x=0$, $xy=yx$。

5．设$T=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in R\right\}$，证明：$T$按矩阵的加法和乘法为一个环，并且有环同构$T\cong C$，这里$R$表示实数域，$C$表示实数域。

6.　在$R=Z[\sqrt{10}]=\{a+b\sqrt{10}|a,b\in Z\}$中，证明以下结论：

（1）映射$\phi:R\to Z,\ a+b\sqrt{10}\mapsto a^2-10b^2$，满足$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$，且$\phi(x)=0$当且仅当$x=0$；

（2）$4+\sqrt{10}$不是R中素元。

三．解答题（共 8分）

设 Z 是整数环，请在 Z 中构造一个极大理想 I，并问：整数环 Z 中的非零素理想是否为极大理想？