南京农业大学
2009年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：822　　试题名称：　高等代数

<u>注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效</u>

一 填充题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 排列 $(2n)(2n-2)\cdots 42$ 的逆序数是 ________________。

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 ________________。

3. 已知二阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=3$，对应的特征向量分别为 $X_1=(1,2)', X_2=(3,4)'$。则 $A=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$。

4. 当 $a=$______时，向量组 $\alpha_1=(a,-1,-3,-11), \alpha_2=(1,-31,3), \alpha_3=(1,2,1,4)$ 的秩为 **2**。

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 λ 的取值范围是 ________________。

6. 在 $R[x]_3$ 中定义内积为 $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$，则在 $R[x]_3$ 中基 $1,x,x^2$ 的标准正交基为__________________________。

二（**15** 分）叙述高斯引理并给予证明。

三（**15** 分）计算下列行列式：$x,y\in R$，

$$D_n=\begin{vmatrix} y & x & x & . & . & . & x \\ x & y & x & . & . & . & x \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ x & x & x & . & . & y & x \\ x & x & x & . & . & x & y \end{vmatrix}。$$

四（**20** 分）设 $W_1=\{A\in M_n(R) \mid A^T=A\}, W_2=\{A\in M_n(R) \mid A^T=-A\}$。证明:

$$M_n(R)=W_1\oplus W_2。$$

五（**15**分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$ 线性相关，而且β与γ都不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。证明：$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\lambda)$。其中$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$表示向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$的秩。

六（**15**分）（1）请分别叙述正交矩阵和正定矩阵的定义。
(2) 如果n阶矩阵A既是正交矩阵又是正定矩阵，请问它是什么矩阵？并给予证明。

七（**20**分）讨论下列方程组的解：

$$\begin{cases}x_1+bx_2+2x_3=2x=1\\x_1+(2b-1)x_2+3x_3=1\\x_1+bx_2+(b+3)x_3=2b-1\end{cases}$$

八（**20**分）设$h\in M_2(R)$（实数域R上2阶矩阵的全体），定义线性空间$M_2(R)$的变换ad_h为：

$$ad_h(x)=hx-xh.$$

(1) 证明：$ad_h:M_2(R)\to M_2(R)$是线性变换。

(2) 如果取$h=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，计算$\mathrm{Ker}\,ad_h$和$\mathrm{Im}\,ad_h$。

(3) 如果取取$h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,求$ad_h$在基$e_1,e_2,e_3,e_4$下的矩阵,其中

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}。$$