南京理工大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：200411035

考试科目：数学分析（满分150分）

考生注意：所有答案按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分。

一．（10分）设函数f在$[a,b]$上连续，且在$[a,b]$中任意有理数点为0，证明f在$[a,b]$上恒为0。

二．（10分）计算

$$I=\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}}\operatorname{sgn}(y-x^3)\,dxdy，其中\operatorname{sgn}u=\begin{cases}1 & u>0\\ 0 & u=0\\ -1 & u<0\end{cases}。$$

三．（15分）设函数f在实轴R上连续，且$\forall(a,b)\subset R$，$\int_a^b f(x)dx=0$，证明：$f(x)\equiv 0$。

四．（15分）α取何值时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

收敛？

五．（15分）设D是以光滑闭曲线L为边界的有界平面区域，$u(x,y),v(x,y)$为D上两个二阶连续可偏导函数，证明：

$$\iint\limits_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\oint_L v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds,$$

其中$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$为$u$沿L的外法向量$\vec{n}$的导数，即$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n},y)$。

六．（20分）设$f_0(x)\in C[0,a]\ (0<a<1)$，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt\ (n=1,2,\cdots)$，证明：当$n$趋于$\infty$时，$f_n(x)$在$[0,a]$上一致收敛于0。

七．（15分）设f为以2π为周期的函数，在$[-\pi,\pi)$上，$f(x)=x$，

1) 求出f的Fourier级数；

2) 证明f的Fourier级数收敛但不一致收敛；

3) 给出f的Fourier级数的和函数。

八．（15分）设$f\in C(-\infty,\infty)$且$\int_x^{x+1}f(t)dt\equiv 0$，$\forall x\in(-\infty,\infty)$，证明$f$是周期为1的函数。

九．（15分）设Ω是R^3中的凸区域，$f(x,y,z)$在Ω中可微并且满足

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

证明：f在Ω中为常函数。

十．（20分）以函数项级数或含参变量积分为例，论述一致收敛概念的作用，并说明它对于有关结论是否必要？（要有论证和反例）