南京理工大学

2005年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：**200511036**

考试科目：高等代数（满分： **150** 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一. 选择填空（2 分×10=20 分）

1. 设 A 是数域 P 上的 $s\times n$ 矩阵,如果 B 是 n 级矩阵，则

   秩(A)-------秩(AB).

   (A) $<$;
   (B) $\le$;
   (C) $\ge$;
   (D) $=$.

2. 设 A 是数域 P 上的 n 级矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则

   $A^*A=AA^*=$-------.

   (A) 单位矩阵 E ;

   (B) $|A|E$;

   (C) $|A^{-1}|E$;

   (D) $\dfrac{E}{|A|}$.

3. 设 A 是复数域上线性空间 V 的一个线性变换，则在 V 中必存在一组基，使 A 在这组基下的矩阵是--------矩阵.

   (A) 单位;
   (B) 对角;
   (C) Jordan (若尔当);
   (D) 正交.

4. 设 A 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，如果对于 W 中任意向量 ξ 有 $A\xi\in W$，则称 W 是 A 的--------子空间.

   (A) 非平凡;
   (B) 不变;
   (C) 核;
   (D) 零.

5. 对于任意一个 n 级实对称矩阵 A，都存在一个 n 级--------矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 成为对角形.

(A) 上三角;
(B) 对称;
(C) Jordan (若尔当);
(D) 可逆.

6. 对一个 $s\times n$ 矩阵 A 作一初等列变换，就相当于在 A 的-------乘上相应的初等矩阵.

(A) 左边;
(B) 右边;
(C) 两边;
(D) 左边或右边.

7. 欧氏空间 V 的线性变换 A 被称为正交变换是指：对任意的 $\alpha,\beta\in V$，都有-------.

(A) $|A\alpha|=|A\beta|$;

(B) $(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$;

(C) $(A\alpha,A\beta)=(A\beta,A\alpha)$;

(D) $|A\alpha|=|A\beta|=1$.

8. 设 A 是数域 P 上的 $s\times n$ 矩阵且秩 $(A)=2$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$。若方程组 $AX=0$ 有非零解，则它的基础解系所含解的个数为-------.

(A) n;
(B) 2;
(C) $n-2$;
(D) $n-1$.

9. n 级实矩阵 A 被称为正交矩阵是指--------.

(A) $AA'=A'A$ (其中，A' 是 A 的转置);

(B) $AA'=A'A=E$ (其中，E 是单位矩阵);

(C) $A^*A=E$ (其中，A^* 是 A 的伴随矩阵);

(D) $AA^*=A^*A$.

10. 设 V 是数域 P 上的一个 3 维线性空间，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是它的一组基，f 是 V 上的一个线性函数，已知

$$f(\xi_1+\xi_3)=1, f(\xi_2-2\xi_3)=-1, f(\xi_1+\xi_2)=-3.$$

则 $f(\xi_1+2\xi_2+3\xi_3)=$---------.

(A) 0;
(B) -19;
(C) -26;
(D) -10.

二.（30 分）

1.（7 分）

判断 $x-2$ 是 $f(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$ 的几重因式.

2.（8 分）

设 p 是奇素数，试证

$$x^p+px+1$$

在有理数域上不可约.

3.（5 分）

设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，α、β 分别是 $\mathcal{A}$ 的属于特征值 λ_1,λ_2（$\lambda_1\neq\lambda_2$）的特征向量，试证：$\alpha+\beta$ 不可能是 $\mathcal{A}$ 的特征向量.

4.（5 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.已知 A 的 3 个特征向量：对应于特征值 $\lambda_1=5$ 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. 试计算 A^m，其中 m 是自然数.

5.（5 分）

证明：正交变换的实特征值只能等于 1 或 -1.

三.（10 分）

用可逆线性变换化下列二次型为规范形,并写出所作的线性变换:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$$

四.（10 分）

设

$$A_n=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$$

是 n 级矩阵且 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$，求 A_n 的行列式 $|A_n|$.

五．（10 分）t 为何值时，下面二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$$

为正定的？

六．（10 分）

设 $\alpha_1=(1,2,-1,-2)$ ，$\alpha_2=(3,1,-1,1)$，$\alpha_3=(-1,0,1,-1)$，$\beta_1=(2,5,-1,-5)$，$\beta_2=(-1,2,-2,3)$. 由 $\alpha_i, i=1,2,3$ 生成的子空间记为 W_1，由 $\beta_j, j=1,2$ 生成的子空间记为 W_2.

(1) 求 W_1+W_2 的维数; (2) 求 W_1+W_2 的一组基.

七．（10 分）

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 4 维线性空间 V 的一组基,已知线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的核及值域.

八．（15 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 成为对角矩阵.

九．（10 分）

a,b 取什么值时,线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\3\\b\end{pmatrix}$$

有解？在有解的情形求一般解.

十.（8分）

若A是n级矩阵，A^*是A的伴随矩阵，证明:

$$秩(A^*)=\begin{cases}n,当秩(A)=n时\\1,\ 当秩(A)=n-1时\\0,\ 当秩(A)<n-1时\end{cases}$$

十一.（10分）

设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in}),i=1,2\cdots s$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$，$A=(a_{ij})_{sn}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，如果线性方程组$AX=0$的解全部是$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$的解．试证$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_s$线性表出.

十二.(7分)

假设A是n维欧氏空间V的线性变换，B是V的变换，且对$\forall\alpha,\beta\in V$，有

$$(A\alpha,\beta)=(\alpha,B\beta).$$

证明：1）B是线性变换;

2）A的核是B的值域的正交补.