

南京理工大学

2005 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 200511035

考试科目: 数学分析 (满分 150 分)

考生注意: 所有答案按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不给分!

一. (10 分) 设 $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \rightarrow a \neq 0 (n \rightarrow \infty)$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

二. (15 分) 求积分 $\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, 其中 $\vec{F} = (xy, yz, xy)$, Σ 为半球面

$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ 和圆 $z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$ 的外侧。

三. (15 分) 设 f 为一阶连续可微函数, 且 $f''(0)$ 存在, $f(0) = 0$, 定义

$$g(x) = \begin{cases} f'(0), & x = 0 \\ \frac{1}{x} f(x), & x \neq 0 \end{cases}$$

证明: g 是一个可微函数, 且 g' 在 0 点连续。

四. (15 分) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但和函数在

$(0, +\infty)$ 上无穷次可微。

五. (15 分) 设 $f \in C[a, b]$, 证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在连续的折线函数 g , 使得

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

作出草图说明你的构造方法。

六. (15 分) 设 $u(x, t)$ 为二元二阶连续可微函数, u 及其各一阶偏导数关于 x

都是以 1 为周期的函数, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 证明: $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx$ 是

一个与 t 无关的函数。

七. (15 分) 设 f 为 $[1, +\infty)$ 上的实值函数, 且 $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$

($x \geq 1$), 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且小于 $1 + \frac{\pi}{4}$ 。

八. (15 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 为一个幂级数, 在某区间 $(-R, R)$ 上收敛, 其和函数为 f , 若数列 $\{x_j\}$, 满足 $R > x_1 > x_2 > \cdots > 0$, 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0$, 且 $f(x_j) = 0, j = 1, 2, \dots$, 证明: $a_n = 0, n = 1, 2, \dots$ 。

九. (15 分) 设 f 为 $[a, b] \times [a, b]$ 上的二元连续函数, 定义

$$g(x) = \max\{f(x, y) \mid y \in [a, b]\},$$

证明: 函数 g 在 $[a, b]$ 上连续。

十. (20 分) 讨论二元函数连续, 可偏导, 可微等三个概念之间的关系, 要有论证和反例。