

南京理工大学

2006 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 200611039

考试科目: 量子力学 (满分 150 分)

考生注意: 所有答案(包括填空题)按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不给分

一、填空题(每题 6 分)

1. 德布罗意关系为 _____。
2. 写出量子力学五个基本假设中任意两个_____。
3. 波函数的标准条件为_____。
4. 能量算符表达式为_____；动量算符表达式为_____。
5. 坐标和动量的对易关系为 $[x, p_x] =$ _____；
测不准关系是 $\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p_x)^2} \geq$ _____。
6. 对氢原子, 不考虑电子的自旋, 能级的简并度为_____；考虑自旋但不考虑自旋与轨道角动量的耦合时, 能级的简并度为_____。
7. 费米子和玻色子所组成的全同粒子体系的波函数分别具有_____性和_____性。
8. 原子跃迁的选择定则中角量子数应满足 $\Delta l =$ _____ 磁量子数应满足 $\Delta m =$ _____。
9. 考虑自旋后, 波函数在自旋空间表示为 $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(x, y, z) \\ \Psi_2(x, y, z) \end{pmatrix}$ (已归一化), 则在态 Ψ 下, 自旋算符 $G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ 对自旋的平均可表示为_____；对坐标和自旋同时求平均的结果可表示为_____。
10. 算符 $\hat{Q}$ 的本征刃 $|n\rangle$ 组成完备系, 则 $|n\rangle$ 的封闭性为_____； $|n\rangle$ 在以 $|x\rangle$ 为基矢的 x 表象中的分量 $\Psi(x, t) =$ _____。

二、 计算题（每题 15 分）请考生在下列 7 题中任选 6 题

1. 一粒子在一维势场 $U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0, \\ 0, 0 \leq x \leq a, \\ \infty, x > a \end{cases}$ 中运动, 求粒子的能级和对应的波函数。

2. 氢原子处在基态 $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$, 求在此态中: r 的平均值; 势能 $-\frac{e^2}{r}$ 的平均值; 动量几率分布函数。 附: $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$

3. 已知氢原子的电子波函数为

$\psi(r, \theta, \varphi, s_z) = \sqrt{\frac{1}{4}} R_{31}(r) Y_{11}(\theta, \varphi) \chi_{1/2}(s_z) + \sqrt{\frac{3}{4}} R_{32}(r) Y_{20}(\theta, \varphi) \chi_{-1/2}(s_z)$ 。求在 ψ 态中测量氢原子能量 E 、 l^2 、 l_z 、 S^2 、 s_z 的可能值和这些力学量的平均值。

4. 一体系未受微扰时有三个能级 $E_1^{(0)}$, $E_2^{(0)}$, $E_3^{(0)}$, 现受一微扰 $\hat{H}'$ 作用, 在 $\hat{H}^{(0)}$ 表象中, $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}'$ 的矩阵表示为 $\begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 & a \\ 0 & E_2^{(0)} & b \\ a^* & b^* & E_3^{(0)} \end{pmatrix}$, 试用微扰论求能级至二级修正。

5. 一电子的哈密顿算符为 $\hat{H} = \frac{eB}{\mu c} \hat{S}_x$, 其中 e, B, μ, c 为常量。

(1) 写出电子自旋 $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ 在 S_z 表象中的矩阵形式; 并写出 $\hat{S}_x$ 的本征值和本征矢。

(2) 求电子的定态薛定鄂方程的解(取 S_z 表象)。

(3) 若 $t=0$ 时, 电子处于 $S_z = \hbar/2$ 的本征态 $\chi(t=0) = \chi_{1/2}(S_z)$, 写出 t 时刻的状态 $\chi(t)$ 。

6. 设有均匀电场作用在电荷为 q 的线性谐振子上, 这个电场可以看作是微扰, 它与时间的关系为 $\varepsilon(t) = \frac{A}{\pi\tau^2} e^{-(t/\tau)^2}$, 其中 A 为常数, $\tau > 0$ 。微扰哈密顿算符为 $\hat{H}' = -q\varepsilon(t)x$ 。设在加上电场之前(即 $t = -\infty$), 线性谐振子处于基态 ϕ_0 , 求电场作用终了时(即 $t = \infty$) 线性谐振子被激发到第一激发态 ϕ_1 的几率, 准确到一级近似。附: $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$;

递推公式: $x\phi_n(x) = \sqrt{\hbar/(\mu\omega)} \left[\sqrt{(n+1)/2} \phi_{n+1}(x) + \sqrt{n/2} \phi_{n-1}(x) \right]$

7. 一束自旋为 $1/2$ 的粒子，相继穿过三个斯特恩-革拉赫实验装置（如图三个装置分别为 ISG_z ， $IISG_n$ ， $IIISG_z$ ）。 ISG_z 可使自旋 $S_z = \hbar/2$ 的粒子通过而滤掉 $S_z = -\hbar/2$ 的粒子。 $IISG_n$ 可使自旋 $S_n = \hbar/2$ 的粒子通过而滤掉 $S_n = -\hbar/2$ 的粒子， $S_n = \vec{n} \cdot \vec{S}$ 。 $\vec{n}$ 为 xz 平面内与 z 轴成 θ 角方向的单位矢量。而 $IIISG_z$ 可使自旋 $S_z = \hbar/2$ 的粒子通过而滤掉 $S_z = -\hbar/2$ 的粒子。

(1) 求自旋算符 $S_n = \vec{n} \cdot \vec{S}$ 的本征态。

(2) 求穿过 $IISG_n$ 后的粒子有多大概率可以从 $IIISG_z$ 穿过。

(3) 如何调整 $IISG_n$ 的方向（即 θ 角）使穿过 $IIISG_z$ 的粒子数最多？

