

南京理工大学

2006 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 200611034

考试科目: 数学分析 (满分 150 分)

考生注意: 所有答案(包括填空题)按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不加分

一、(10 分) 证明 $\varphi(x) = \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续, 但 $\forall \delta > 0$, $\varphi(x)$

在 $[\delta, +\infty)$ 上一致连续。

二、(10 分) 若 $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(\forall t > 0)$, 称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

是 k 次齐次的。证明 可微函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 k 次齐次的充分必要条

件是 $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = kf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

三、(10 分) 证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上点点收敛但不一致收敛;

而 $\forall \delta > 0$, 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛。

四、(15 分) 设函数 f 和 g 都在 x_0 点有极限, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, 用 $\varepsilon - \delta$

语言证明 函数 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 点极限也存在。

五、(15 分) 已知 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + (x-y)^2 + y^2)} dx dy.$$

六、(15 分) 求积分 $\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$, 其中向量函数 $\vec{E} = \frac{1}{r^2}(x^3, y^3, z^3)$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{n}$ 为 Σ 在点 (x, y, z) 处外法线的单位向量, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的外侧。

七、(15 分) 设 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ 是一个二阶矩阵, $\|X\| = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$,

$d(X, Y) = \|X - Y\|$ 是 X 到 Y 的距离, 二阶方阵集合 $S = \{X \mid \det(X) = 0\}$

(其中 $\det(X)$ 表示 X 的行列式)。 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A 到 S 的距离最小值点及最小值。

八、(15 分) 设 $\{f_n\}$ 为 $[0, 1]$ 上的一个连续函数列, 若 $\forall x_0 \in [0, 1]$, $\{f_n(x_0)\}$ 是

有界数列, 用闭区间套定理证明存在 $[0, 1]$ 的一个长度不为 0 的子区间 $[c, d]$

以及常数 C 使得 $|f_n(x)| \leq C, \forall x \in [c, d], n = 1, 2, \dots$ 。

九、(15 分) 设函数 f 在 $[a, b]$ 上可微函数, 且值域仍含在 $[a, b]$ 内, 若

$|f'(x)| < c < 1, \forall x \in [a, b]$, 设 x_0 为 $[a, b]$ 内任一点, 定义数列 $\{x_n\}$ 为

$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$, 证明 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $[a, b]$ 内某一点 d , 且

$$|x_n - d| \leq \frac{c^n}{1-c} |x_1 - x_0|.$$

十、(15 分) 讨论广义积分 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ 的敛散性, 如果收敛, 这类积分如何计算? (给出想法即可, 不一定要严格算出)。

十一、(15 分) 设 $\{f_n\}$ 为 $[0, 1]$ 上连续函数列, 满足 $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq 0$

$(\forall x \in [0, 1]), n = 1, 2, \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, 证明 $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。