南京理工大学

2007年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2007011036

考试科目：高等数学（满分150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、填空题(本题共5小题，每小题5分，满分25分)：

(1) 函数 $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调增区间为________________.

(2) 设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，则 $\int f(x)dx =$________________.

(3) 设 L 为取正向的圆周 $L: x^2 + y^2 = 9$，则曲线积分

$$\oint_L (2xy - 2y^2)dx + (2x^2 + y^2 - 4x)dy = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(4) 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!} =$________________.

(5) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导，且有 $f'(x) = g(x)$，$g'(x) = f(x)$，$f(0) = 0$，

$g(x) \neq 0$，则函数 $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} =$________________.

二、选择题(本题共5小题，每小题5分，满分25分)

(1) 设 $a_n = \dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ 等于[　　]

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$.　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$.　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x) + f(x)}{1 - e^{-x}} = 1$，$f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值，则

[　]

(A) 当 $f(0) = 0$ 时 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(B) 当 $f(0) = 0$ 时 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(C) 当 $f(0)=1$ 时 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(D) 当 $f(0)=1$ 时 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(3) 椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点 $(-1,-2,3)$ 处的切平面与平面 $z=1$ 的交角为 [　　]

(A) $\frac{\pi}{4}$.　　(B) $\arccos\frac{7}{16}$.

(C) $\arccos\frac{7}{\sqrt{22}}$.　　(D) $\arccos\frac{3}{\sqrt{22}}$.

(4) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿任意方向的方向导数都存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 处[　　]

(A) 可微.　　(B) 两个偏导数都存在.

(C) 不一定可微.　　(D) 连续但不可微.

(5) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}(1-\cos\frac{a}{\sqrt{n}})$ （常数 $a\neq 0$ ）为[　　]

(A) 绝对收敛.　(B) 条件收敛.　(C) 发散.　(D) 收敛性与 a 有关.

三、(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1、已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f'(0)$ 存在，且对任意的实数 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，求函数 $f(x)$.

2、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1+2t^2 \\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du \end{cases}$ $(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

3、求抛物线 $y=-x^2+1$ 在区间 $(0,1)$ 内的一条切线，使该切线与两坐标轴和抛物线 $y=-x^2+1$ 所围的面积最小.

4、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

5、计算二重积分 $I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy$. 其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq\pi\}$.

四、（本题满分 10 分）

设稳定流动的不可压缩流体（假设密度为 1）的速度场由 $\vec{v}=(y^2-z)\vec{i}+(z^2-x)\vec{j}+(x^2-y)\vec{k}$ 给出，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$ 是速度场中一片有向曲面，求在单位时间内流向曲面 Σ 外侧的流体的质量。

五、（本题满分 10 分）

已知方程 $(6y+x^2y^2)dx+(8x+x^3y)dy=0$ 的两边乘以 $y^3f(x)$ 后便成为全微分方程，试求出可导函数 $f(x)$，并解此全微分方程。

六、（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2},0\le x\le 1$. 证明：$\forall x\in(0,1)$，有

(1) $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$（常数）

(2) $C=f(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$。

七、（本题满分 10 分）

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{n-1}{n}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

八、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：

$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\dfrac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$。

九、（本题满分 10 分）

设 $|a_n|\le 1\ (n=1,2,3,\cdots)$，$|a_n-a_{n-1}|\le\dfrac{1}{4}|a_{n-1}^2-a_{n-2}^2|\ (n=3,4,5,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛。