

南京理工大学

2007 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：量子力学（满分 150 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、回答下列问题（考生在下列 12 题中选作 10 题，每题 6 分，共 60 分）：

- 1 （1）德布罗意关系式是仅适用于基本粒子如电子、中子，还是同样适用于具有内部结构的复合体系？（2）粒子的德布罗意波长是否可以比其本身线度长或短？二者之间是否有必然联系？
- 2 一维空间两粒子体系的波函数为 $\psi(x_1, x_2)$ ，写出下列概率：
 - （1） $x \leq x_1 \leq x + dx, \alpha \leq x_2 \leq \beta$
 - （2）发现粒子 1 的位置介于 x 和 $x + dx$ 之间（不对粒子 2 进行观测）
- 3 玻恩近似法的基本思想是什么？
- 4 什么是束缚态？什么是定态？
- 5 写出量子力学五个基本假设中任意三个。
- 6 厄米算符有哪些特性？
- 7 判断下列论断的正误：
 - （1）一体系的哈密顿量是守恒量，则体系必处于定态。
 - （2）若 \hat{F} 与 \hat{G} 都是体系的守恒量，则它们都具有确定的测量值。
 - （3）量子力学适用于微观体系，而经典力学适用于宏观体系。
- 8 试述电子具有自旋的实验证据。
- 9 十九世纪末期人们发现了哪些不能被经典物理学所解释的新的物理现象？
- 10 具有分立本征值谱的力学量在其自身表象中如何表示？其本征矢量是什么？
- 11 如果有心力场不是库仑场（即 $V(r)$ 不与 $\frac{1}{r}$ 成比例），则角分布函数将取什么形式？

12 量子力学中角动量是如何定义的？地球自转是否与量子力学中的自旋概念相对应？

二 计算题（请考生在下列 7 题中任选 6 题，每题 15 分，共 90 分）

1 利用数学归纳法证明： $[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{s=0}^{n-1} \hat{B}^s [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-s-1}$

2 利用厄米多项式的递推关系和求导公式：

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

证明：一维谐振子波函数满足下列关系：

$$x\psi_n(x) = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(x) \right]$$

$$\frac{d\psi_n(x)}{dx} = \alpha \left[\sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(x) \right], \quad \alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$$

已知一维谐振子的波函数为： $\psi_n(x) = N_n e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x)$, $N_n = \left(\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^n n!} \right)^{1/2}$

3 假如把原子核看成是一个半径为 10^{-15} 米的球方势阱，实验表明势阱深度约为 10 MeV，试利用不确定关系论证：电子不可能存在于原子核内。

4 当 \mathcal{E} 为小的参数时，求矩阵 $\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2\mathcal{E} & 0 \\ 2\mathcal{E} & 2+\mathcal{E} & 3\mathcal{E} \\ 0 & 3\mathcal{E} & 3+2\mathcal{E} \end{pmatrix}$

的本征值（精确到 \mathcal{E} 的二次项）和本征矢量（精确到 \mathcal{E} 的一次项）。

5 已知电子自旋在空间任一方向上的投影只有两个可能取值： $\pm \frac{\hbar}{2}$ ，试求电子

自旋在空间任意方向 \vec{n} 的投影 $\hat{s}_n = \hat{s} \cdot \vec{n} = \hat{s}_x \cos \alpha + \hat{s}_y \cos \beta + \hat{s}_z \cos \gamma$

的归一化本征矢量。设单位矢量 \vec{n} 的方向余弦为 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 。

6 假定一电子状态由波函数 $\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{i\varphi} \sin \theta + \cos \theta) g(r)$ 描述，其

中 $\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$, φ, θ 分别是方位角和极角。

1) 处在该态电子的轨道角动量 z 分量 L_z 的可能测量结果是什么? 得到每个可能结果的概率是多少?

2) L_z 的期望值是多少?

7 设单粒子定态波函数为 $\psi_k(r) = \frac{1}{r}(e^{-ikr} + be^{ikr})$, 试利用薛定谔方程确定其势场。

附:

Plank 常量: $h = 6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$

电子静质量: $m_e = 9.11 \times 10^{-31} kg$

球坐标系中: $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

几个球谐函数: $Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$, $Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$

算符恒等式: $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$