南京理工大学

2007年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目:数学分析(满分150分)

考生注意:所有答案按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分!

一．(15 分)设 $f,g\in C[a,b]$，　$f(x)\le g(x)$ ($\forall x\in[a,b]$)，且 $\exists x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)<g(x_0)$，证明

$$\int_a^b f(x)dx<\int_a^b g(x)dx$$

二．(15分)计算题

1. 设 C 为平面上有界区域 D 的光滑边界曲线，$\vec{n}$ 为 C 的外法向量，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，分别就 C 的两种情况计算

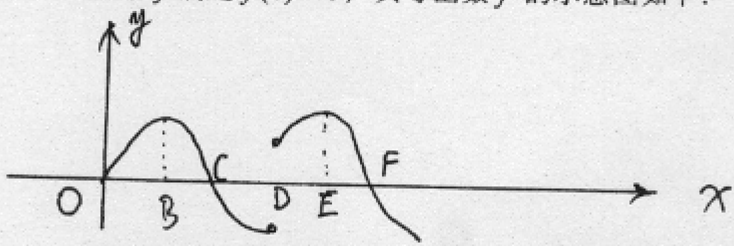
$$I=\oint_C \frac{\partial \ln r}{\partial n}dS$$

(1)原点在区域 D 的内部;

(2) 原点在 C 的外部.

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma} rot\vec{F}\cdot\vec{n}dS$，其中 $\vec{F}=(-y+x^2,x,xyz^2)$，Σ 是 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ z\ge 0\end{cases}$ 的外侧;

三．(10分)若函数 f 满足 $f(0)=0$，其导函数 f' 的示意图如下:



请作出 f 的示意图.

四．(15分)讨论一致连续概念的意义:

(1) 给出函数一致连续的定义及几何意义.

(2) 函数一致连续与连续的关系.(要有论证)

五．(15 分) 设 $f\in C[a,+\infty)$，$f\ge 0$，且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$? 若是，请证明;若不是，请举反例，并说明对 f 加一点什么条件

就能保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

六. (15 分) 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$

(1) 在 $(0,1)$ 上收敛;

(2) 在 $[0,1)$ 上不一致收敛;

(3) 在 $[-\delta,\delta]$ $(0<\delta<1)$ 上一致收敛.

七. (15 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个无穷级数, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的项作任意组合(即加括号)而得到的新级数都收敛.

八. (20 分) 设

$$f(x)=\begin{cases}\text{连接平面上点}\left(\frac{n-1}{n},0\right)\text{和}\left(\frac{n}{n+1},\frac{1}{2^{n-1}}\right)\text{的直线段} & x\in\left[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}\right),\ n=1,2,\cdots\\ 0, & x=1\end{cases}$$

(1) 给出 f 的解析表达式并作出图形;

(2) 求出 f 的间断点集, 并指出间断点的类型;

(3) 证明 f 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积的;

(4) 求出 $\int_0^1 f(x)dx$.

九. (15 分) 利用周期为 2π 的函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

的 Fourier 级数求 $|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 展开式, 并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

十. (15 分) 设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ 是实对称二阶矩阵, $f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$,

(1) 证明 $\alpha=\max\limits_{x^2+y^2=1}f(x,y)$ 和 $\beta=\min\limits_{x^2+y^2=1}f(x,y)$ 都存在;

(2) 用 Lagrange 乘数法证明 α,β 都是 A 的特征值.