南京理工大学
2008 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号： 2008011036

考试科目： 高等代数（满分 150 分）

考生注意： 所有答案（包括选择，填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一 填空，选择填空题，（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 多项式 $f(x)=x^{2008}+2$ 是否是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式？答：________.

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$，则 $[(A^*)']^{-1}=$________________.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{bmatrix}$，且方程组 $AX=0$ 的解空间的维数为 2，则 $a=$____.

4. 设 A,B 均为正定的实对称矩阵，则 AB 必是（ ）.

A. 实对称矩阵　B. 正定矩阵　C. 可逆矩阵　D. 正交矩阵

5. 下列结论正确的是（　）.

A. 若 A 与 B 等价，则存在正交矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

B. 若 A 与 B 合同，则存在正交矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

C. 若 $|A|=0$，则 A 至少有一个特征值为 0

D. 若 $|A|=1$，则 A 至少有一个特征值为 1

6. 设矩阵 A 满足 $A^3=E$，则有（　）.

A. 若 $A-E$ 可逆，则 $A+E$ 必可逆　B. 若 $A-E$ 可逆，则 $A+E$ 必不可逆

C. 若 $A+E$ 可逆，则 $A-E$ 必可逆　D. 若 $A+E$ 可逆，则 $A-E$ 必不可逆

二. 按要求解答下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，共 28 分）

1. 当 a,b 满足什么条件时，多项式 $f(x)=x^4+4ax+b$ 有重根？

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数域 P 中互不相同的数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是数域 P 中任一组给定的数，证明：存在唯一的数域 P 上的多项式 $f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ 使 $f(a_i)=b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

3. 证明：设 $\mathcal{X}$ 是一个固定的 n 维欧氏空间，证明 $\mathcal{X}$ 中不同基的度量矩阵是合同的.

4. 什么是若尔当 (Jordan) 形矩阵？任一 $n\times n$ 复系数矩阵一定可相似于下三角矩阵吗？为什么？

三. （本题满分 10 分）用非退化的线性替换将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$$

化成标准形.

四.（本题满分 12 分）设 $\alpha_i=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}\}$，$i=1,2,\cdots,s$，$\beta=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$.
证明：如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.

五. （本题满分 15 分）设 A,B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，证明：

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|.$$

六. （本题满分 15 分）设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

七. （本题满分 15 分）已知 ±1 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 特征值.

(1) 求参数 a,b 的值;

(2) 问 A 能否对角化？为什么？

八. （本题满分 15 分）设 P 是一个数域，已知 $P^{2\times2}$ 的线性变换

$\varphi(X)=MX-XM,\quad (\forall X\in P^{2\times2},\ M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix})$

(1) 求 $\varphi(P^{2\times2})$ 的基.

(2) 求 $\varphi^{-1}(0)$ 的基.

九. （本题满分 10 分）设 $f(\alpha,\beta)$ 是欧氏空间 V 上的反对称的双线性函数，再设 K 是 V 的一个真子空间，证明：对 $\xi\notin K$，必有 $0\neq\eta\in K+L(\xi)$，使得 $f(\eta,\alpha)=0$ 对所有 $\alpha\in K$ 都成立.