南京理工大学

2008 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2008011035

考试科目：数学分析（满分 150 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一. (10 分) 设 $P_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \cdots$ 为平面上有界点列，证明 $\{P_n\}$ 有收敛子列.

二. (15 分) 设函数 f 在 $(a, +\infty)$ 上连续，f 在 $(a, +\infty)$ 上是否一致连续？若是，请证明；若不是，请举反例，并论证对 f 加怎样的条件，能使 f 在 $(a, +\infty)$ 上一致连续.

三. (10 分) 设流体流速为 $\vec{v} = (3x, 2y, 0)$, 求单位时间内流过椭圆球面 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 的流量.

四. (15 分) 求 $f(x) = \cos x, x \in [0, \pi]$ 的正弦展开式，并画出 Fourier 正弦级数的和函数的图像.

五. (10 分) 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sin xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

证明：f 在 $(0, 0)$ 点连续而不可微.

六. (15 分) 用 ε-N 语言证明 $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ 在 $[0, 2)$ 上点点收敛但不一致收敛.

七. (20 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. 画出 f 的草图；
2. 求出 f 的所有间断点并判定其类型；
3. 证明 f 在 $[0, 1]$ 上可积；
4. 求出 $\int_0^1 f(x)dx$ (表示成收敛级数即可).

八. (20 分) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos x \sin^n x$, $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 为一个函数项级数，$S_n(x)$ 为其前 n 项部分和函数，

1. 证明：在 $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ 上，级数收敛；

2. 若级数的和函数为 $S(x)$, 计算 $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)dx$;

3 若 $I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)dx$, 验证

$$I_1 \leq I \leq I_0, \quad I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

4. 证明 $\{I_{2n}\}$ 单调减，$\{I_{2n+1}\}$ 单调增，且

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n} = \lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = I.$$

九. (20 分) 1. 设 $f(x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$, 证明 f 是 $(0, \infty)$ 上的严格凸函数；

2. 设 $a, b, c > 0$, 证明 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c$, 并给出等号成立的条件.

十. (15 分) 论证 e^π 和 π^e 的大小.