南京理工大学

2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2009011033
考试科目：数 学（满分 150 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} =$ ________。

2. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{1+2n} + \dfrac{1}{2+2n} + \cdots + \dfrac{1}{n+2n}\right) =$ ________。

3. 求极限 $\lim\limits_{x \to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x =$ ________。

4. $d\int_0^x e^t \sin 2t\,dt =$ ________。

5. 设 $L: x^2 + y^2 = 1$，则 $\oint_L x^2\,ds =$ ________。

6. 方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x-y}$ 的通解为 ________。

7. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi}{6}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi}{6}$ 的和等于 ________。

8. A, B 均为 n 阶矩阵，$A \sim B$，B 为正交矩阵，则 $|A^2| =$ ________。

二、计算下列各题（每题 8 分，40 分）

1. 设 $f(x)$ 具有 $f(0)=0, f'(0)=1$. 试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$。 二阶连续导数，且

2. 求 $I(x) = \int_{-1}^{1} |t-x|\,e^t\,dt$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值。

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且满足方程

$$f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

求 $f(x)$。

4．计算 $I=\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}dxdy$,其中$D$由$x=2,y=x,xy=1$围成.。

5．求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$的收敛区间。

三、计算下列各题（每题 8 分，共 24 分）

1．给定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$

（1）将二次型化为标准型，并写出相应的非奇异线性变换；

（2）求其正惯性指数，并判断该二次型属于哪一类。

2．设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$,求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵 。

3．已知 A 为 n 阶方阵，且满足 $A^2-3A-4E=0$

（1）证明 A 可逆，并求 A^{-1}；（2）若$|A|=2$，求$|6A+8E|$的值。

四、（满分 10 分）证明当$0<x<2$时,成立:$4x\ln x-x^2-2x+4>0$。

五、(满分 10 分)若 $f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$上是周期函数且 $f(x)\to 0$ $(x\to\infty(\text{或}x\to-\infty))$，

则 $f(x)\equiv 0$。

六、（满分 6 分）求 $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$。

七、(满分 10 分)判断下列命题是否正确，正确的给出证明，不正确的举出反例。

（1）若$\{x_n\}$收敛，而 $y_n=n^{\alpha}(x_n-x_{n-1}),\alpha>0$，则 $y_n\to\infty(n\to\infty)$；

（2）若$\{x_n\}$收敛，而 $y_n=n^2(x_n-x_{n-1})$，则 $y_n\to 0(n\to\infty)$。

八、（满分 10 分）设行列式 $D=\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&\cdots&x_{1n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}$ 的 N 个行向量有定长

$a_1,\cdots,a_n$，求 D 的最大值和最小值。