南京理工大学

2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2009011040
考试科目：量子力学（满分150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分。

请考生在下列13题中选作10题，每题15分，满分150分。

一、简要回答下列问题：

1 量子力学中角动量是如何定义的？地球自转是否与量子力学中的自旋概念相对应？
2 玻恩近似法的基本思想是什么？
3 如果有心力场不是库仑场（即 $V(r)$ 不与 $\frac{1}{r}$ 成比例），则角分布函数将取什么形式？
4 如何理解波函数必须满足的标准条件？
5 在什么情况下力学量的测量值具有确定值？两个不对易的力学量是否一定不能同时具有确定的测量值？

二、定义 $[\hat{A},\hat{B}]_+ \equiv \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$（反对易式），已知 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 均与 $\hat{A}$，$\hat{B}$ 对易，证明：

（1）$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}]_+ - [\hat{B},\hat{C}]_+\hat{A} + \hat{C}[\hat{A},\hat{B}]_+ - [\hat{A},\hat{C}]_+\hat{B}$

（2）$[\hat{a}\hat{A},\hat{b}\hat{B}] = \frac{1}{2}[\hat{a},\hat{b}]_+[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2}[\hat{a},\hat{b}][\hat{A},\hat{B}]_+$

三、计算受到力 $F=-kx+k_0(k=m\omega^2)$ 作用的一个粒子的波函数和能量允许值。

四、已知氢原子的电子波函数为 $\psi_{nlmm_s}(r,\theta,\varphi,s_z)=\sqrt{\frac{1}{4}}R_{31}(r)Y_{11}(\theta,\varphi)\chi_{1/2}(s_z)$ $+\sqrt{\frac{3}{4}}R_{32}(r)Y_{20}(\theta,\varphi)\chi_{-1/2}(s_z)$。求在 ψ 态中测量氢原子能量 E、L^2、L_z、s^2、s_z 的可能值和这些力学量的平均值。

五、一维运动的粒子处于状态 $\psi(x)=\begin{cases} Axe^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$ 之中，其中 $\lambda>0$，A 为待求的归一化常数，求：
(1) 归一化常数；
(2) 粒子坐标的平均值和粒子坐标平方的平均值；

(3) 粒子动量的平均值和粒子动量平方的平均值。

六、设粒子处在宽度为 a 的非对称一维无限深势阱中（坐标原点取在势阱左侧阱壁处），求能量表象中粒子坐标和动量的矩阵表示。

七、质量为 m 的粒子，在非对称一维无限深势阱中运动，若 t=0 时，粒子处于 $\psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{2}}\varphi_1(x)-\sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_2(x)+\frac{1}{2}\varphi_3(x)$状态上，其中，$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$为粒子的第 n 个能量本征态。

(1) 求 t=0 时能量的可测值与相应的取值概率；

(2) 求 t>0 时的波函数$\psi(x,t)$及能量的可测值与相应的取值概率。

八、厄密算符 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$，满足 $\hat{A}^2=\hat{B}^2=1$ 和 $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=0$，求：在 $\hat{A}$ 表象中，$\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的矩阵表示形式。

九、已知电子自旋在空间任一方向上的投影只有两个可能取值：$\pm\frac{\hbar}{2}$，试求电子自旋在空间任意方向 $\vec{n}$ 的投影 $\hat{s}_n=\hat{\vec{s}}\cdot\vec{n}=\hat{s}_x\cos\alpha+\hat{s}_y\cos\beta+\hat{s}_z\cos\gamma$ 的归一化本征矢量。设单位矢量 $\vec{n}$ 的方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$。

十、设粒子被限制在矩形匣子中运动，即 $V(x,y,z)=\begin{cases}0, & 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c\\ \infty, & \text{其余区域}\end{cases}$，求粒子的能量本征值和本征波函数。当 a=b=c 时，讨论能量的简并情况。

十一、有一定域电子（作为近似模型，可以不考虑轨道运动）受到均匀磁场 $\vec{B}$ 的作用，磁场 $\vec{B}$ 指向 x 轴正方向，磁相互作用为 $\hat{H}=\frac{eB}{\mu c}\hat{s}_x=\frac{eB\hbar}{2\mu c}\hat{\sigma}_x$。设 t=0 时，电子的自旋向上，即 $S_z=\frac{\hbar}{2}$，求 t>0 时 $\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z$ 的平均值。

十二、设 $\hat{K}=\hat{L}\hat{M},\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}=1,\varphi$为$\hat{K}$ 的本征矢，即 $\hat{K}\varphi=\lambda\varphi,\lambda$ 为本征值，试证明 $\mu\equiv\hat{L}\varphi,v\equiv\hat{M}\varphi$ 也是 $\hat{K}$ 的本征矢，相应的本征值分别为 $\lambda-1,\lambda+1$.

十三、设在 H^0 表象中，$\hat{H}$ 的矩阵为：

$$\hat{H}=\begin{bmatrix}E_1^{(0)} & 0 & a\\ 0 & E_2^{(0)} & b\\ a^* & b^* & E_3^{(0)}\end{bmatrix}\qquad E_1^{(0)}<E_2^{(0)}<E_3^{(0)}$$

试用微扰论求能量的二级修正。

附：

1 一维线性谐振子的能量本征函数和能量本征值分别为：

$$\psi_n(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2} H_n(\alpha x)，\quad \alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega, n=0,1,2,\ldots\ldots$$

2 氢原子能量本征值：$E_n=-\dfrac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\dfrac{1}{n^2}$

3 定积分：$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx=\dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$ $\quad\alpha>0$，n 为正整数

4 宽度为 a 的非对称一维无限深势阱中，粒子的归一化能量本征函数为：

$$\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} & 0<x<a \\ 0 & x\le 0, x\ge a\end{cases},$$

能量本征值为：$E_n=\dfrac{n^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2}, n=1,2,3\ldots\ldots$，m 为粒子质量

5 不定积分：$\int x\cos ax dx=\dfrac{1}{a^2}\cos ax+\dfrac{x}{a}\sin ax+C$