南京理工大学

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：

考试科目：数学分析（满分 150 分）

一．求下列极限：（15 分）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{1+2^n+3^n}}$ 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

3. $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 2r^2} e^{2xy}\cos\left(x^2-y^2\right)dxdy$

二．设$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$。（10 分）

三．证明下列不等式：（15 分）

1. 对任意$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$；

2. 当$h>0$时，$\dfrac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$。

四．试确定常数a和b的值，使得当$x\to 0$时，$\cot x=\dfrac{1+ax^2}{x+bx^3}+o\left(x^5\right)$。（10 分）

五．计算下列积分：（18 分）

1. $\int(\tan x-\sec x)^2\,dx$；

2. $\iint\limits_D(x+y)\,dxdx$，其中$D$是由曲线$x^2+y^2=x+y$围成的平面区域；

3. $\iint\limits_S 4xzdydz-2zydzdx+\left(1-z^2\right)dxdy$，其中$S$为$yoz$平面上的曲线$z=e^y\,(0\le y\le a)$绕$z$轴旋转而成的曲面下侧。

六．给定幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$

（1）求它的收敛半径，收敛域以及和函数$s(x)$；

（2）已知$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求$\int_0^1 s(x)dx$。（15 分）

七．设f是以2π为周期的函数，当$x\in[-\pi,\pi]$时，$f(x)=\frac{\pi}{2}\frac{e^x+e^{-x}}{e^\pi-e^{-\pi}}$。

（1）将f展开为$Fourier$级数；

（2）求级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$的和。（12 分）

八．设$z=f(x,y)$有二阶连续偏导数，a为常数，$a\neq 0$，$u=x+ay,v=x-ay$，求

$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$。（10 分）

九．设v是由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面与三个坐标面所围成的区域的体积，用

$Lagrange$乘数法求v的最小值。（15 分）

十．证明：（1）函数列$\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$在$[0,1]$上一致收敛于e^x；

（2）函数列$\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$在$[0,1]$上一致收敛于$\frac{1}{1+e^x}$；

（3）$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{e^{\frac{x}{n}}+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}dx=1+\ln\frac{2}{1+e}$。　（15 分）

十一。已知$\alpha\geq 0,\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，计算$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(1+x^2)}dx$的值。　（15 分）