南京理工大学

2010年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2010011045
考试科目： 数学（理）（满分 150 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、填空题(本题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）：

1. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $dz\big|_{\substack{x=2\\y=-1}}=$__________________.

2. 设 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=$__________________.

3. 和两条直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$，$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ 都垂直，且和 z 轴成锐角的单位向量是_______.

4. 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{z-1}=4$ 在 $(1,1,2)$ 处的切平面方程是________.

5. 设 Ω 是 $z=x^2+y^2$ 及 $z=1$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2},z)dv$ 在柱坐标系下的三次积分是__________________.

6. 设 L 是直线 $y=-x$ 在 $(0,0)$ 与 $(1,-1)$ 的一段，则 $\int\limits_{L}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$____________.

7. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $(-\pi,\pi]$ 上 $f(x)=x+1$，它的 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_1=$________________.

8. 已知连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$，且 $\int_L[e^{-x}+f(x)]ydx-f(x)dy$ 与路径无关，则 $f(x)=$__________________.

二、简答题(本题共 6 小题，每小题 7 分，满分 42 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{x^6}$.

2. 设 $y=\dfrac{x^2}{1-x}+x^8$，求 $y^{(8)}$.

3. 求定积分 $\int_{-1}^{1}(\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+x\cos^5 x)\,dx$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\,dt$，求常数 a.

5. 计算积分 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y):\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

6. 已知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f(2)=1$，$f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx=4$，计算定积分 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

三.（8 分）求函数 $u=x-2y+2z$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的极值。

四.（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\le 0$，记 $F(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$，证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$。

五.（10 分）过坐标原点作抛物线 $y=x^2-2x+4$ 的两条切线，设切点分别为 P 和 Q，求切线 OP 、OQ 与抛物线所围成的平面图形的面积。

六.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

七、（10 分）求微分方程 $y''+2y'-3y=2e^x$ 的通解，并求满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解。

八．(10 分) 设 $f(x)$ 在[2，4]内可导，且 $f(2)=\int_3^4 (x-1)^2 f(x)dx$，试证在（2，4）内至少存在一点 ξ 使得 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$。

九．（10 分）设 $u(x,y),v(x,y)$ 在闭区域 $D: x^2+y^2\le 1$ 上具有一阶连续偏导数，又 $\vec{F}(x,y)=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$，$\vec{G}(x,y)=(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\vec{i}+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})\vec{j}$，在 $\boldsymbol{D}$ 的边界 L 上：$u(x,y)=1, v(x,y)=y$，计算积分：$\iint\limits_D \vec{F}\cdot\vec{G}\,dxdy$。