

南京理工大学

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 2010011036

考试科目: 高等数学 (满分 150 分)

考生注意: 所有答案 (包括填空题) 按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不给分

一、填空题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 满分 40 分) :

1. 设 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 则 $dz|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} =$ _____.
2. 设 $f(x) = e^{-x}$, 则 $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ _____.
3. 和两条直线 $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$, $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{0}$ 都垂直, 且和 z 轴成锐角的单位向量是 _____.
4. 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2\sqrt{z-1} = 4$ 在 $(1, 1, 2)$ 处的切平面方程是 _____.
5. 设 Ω 是 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = 1$ 所围成的闭区域, 则 $\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) dv$ 在柱坐标系下的三次积分是 _____.
6. 设 L 是直线 $y = -x$ 在 $(0, 0)$ 与 $(1, -1)$ 的一段, 则 $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds =$ _____.
7. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 在 $(-\pi, \pi]$ 上 $f(x) = x + 1$, 它的 Fourier 级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $a_1 =$ _____.
8. 已知连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = -\frac{1}{2}$, 且 $\int_L [e^{-x} + f(x)] y dx - f(x) dy$ 与路径无关, 则 $f(x) =$ _____.

二、简答题(本题共 6 小题, 每小题 7 分, 满分 42 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt}{x^6}$.

2. 设 $y = \frac{x^2}{1-x} + x^8$, 求 $y^{(8)}$.

3. 求定积分 $\int_{-1}^1 \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + x \cos^5 x \right) dx$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$, 求常数 a .

5. 计算积分 $\iint_D \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$.

6. 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $f(2)=1$, $f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x) dx = 4$, 计算定积分 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

三. (8 分) 求函数 $u = x - 2y + 2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值.

四. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \leq 0$, 记

$$F(x) = \frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a}, \text{ 证明在 } (a, b) \text{ 内有 } F'(x) \leq 0.$$

五. (10 分) 过坐标原点作抛物线 $y = x^2 - 2x + 4$ 的两条切线, 设切点分别为 P 和 Q , 求切线 OP 、 OQ 与抛物线所围成的平面图形的面积.

六. (10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

七. (10 分) 求微分方程 $y'' + 2y' - 3y = 2e^x$ 的通解, 并求满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

八. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 内可导, 且 $f(2) = \int_3^4 (x-1)^2 f(x) dx$, 试证在 $(2, 4)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $(1-\xi)f'(\xi) = 2f(\xi)$ 。

九. (10 分) 设 $u(x, y), v(x, y)$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上具有一阶连续偏导数, 又

$$\vec{F}(x, y) = u(x, y) \vec{i} + v(x, y) \vec{j}, \quad \vec{G}(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vec{j}, \text{ 在 } D \text{ 的边界 } L \text{ 上:}$$

$$u(x, y) = 1, v(x, y) = y, \text{ 计算积分: } \iint_D \vec{F} \cdot \vec{G} dx dy.$$