南京理工大学

2010年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2010011038

考试科目：高等代数（满分： 150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一.（每小题5分，共20分）下列各题的4个选项中只有一个正确，请将其选出.

1.（5分）设A是3阶方阵，将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C, 则满足AQ=C的可逆矩阵Q为（　　）

(1) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(3) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.　(4) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2.（5分）设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则（　　）

（1）A,B合同且相似；

（2）A,B合同但不相似；

（3）A,B相似但不合同；

（4）A,B既不合同也不相似.

3.（5分）设A是n阶非零方阵，E是n阶单位矩阵，若$A^3=0$，则（　　）

（1）$E-A$，$E+A$都可逆；

（2）$E-A$，$E+A$都不可逆；

（3）$E-A$可逆，$E+A$不可逆；

（4）$E-A$不可逆，$E+A$可逆.

4.（5分）设$a_1,a_2,\cdots,a_s$均为n维列向量，A是$m\times n$矩阵，那么（　　）

(1) 若$a_1,a_2,\cdots,a_s$线性相关，则$Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$线性相关.

(2) 若$a_1,a_2,\cdots,a_s$线性相关，则$Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$线性无关.

（3）若$a_1, a_2, \cdots, a_s$线性无关，则$Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$线性相关.

（4）若$a_1, a_2, \cdots, a_s$线性无关，则$Aa_1, Aa_2, \cdots, Aa_s$线性无关.

二.（每小题5分，共20分）

1.（5分）

设$A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，$\alpha, \beta$是三维列向量，$\alpha^T, \beta^T$分别是$\alpha, \beta$的转置。

请证明：秩$(A) \le 2$

2.（5分）

设$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$是分块矩阵，其中，$A, B$是可逆方阵，求$D^{-1}$.

3.（5分） 如果多项式$f(x), g(x)$不全为零且，

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)).$$

请证明：$(u(x), v(x)) = 1$.

4.（5分）在欧氏空间R^4中（内积按通常定义），求$\alpha = (1,2,2,3)$与$\beta = (3,1,5,1)$之间的夹角.

三.（10分）

请证明：同一个双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的。

四.（10分）

设V是实数域上的二维线性空间，线性变换 $\mathcal{A}$ 在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2$下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \ne k\pi$$，这里k代表整数.

请证明：$\mathcal{A}$没有非平凡不变子空间.

五.（15分）

已知平面上三条不同直线的方程分别为

l_1：$ax + 2by + 3c = 0$,

l_2：$bx + 2cy + 3a = 0$,

l_3：$cx + 2ay + 3b = 0$.

试证：这三条直线交于一点的充分必要条件为$a + b + c = 0$.

六.（15分）

设 R^3 是三维欧氏空间（Euclid 空间），已知 R^3 上的三阶矩阵 A 与三维向量 x 使得向量 x, Ax, A^2x 线性无关且 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$． 记 $C=(x, Ax, A^2x)$， 求 3 阶方阵 B，使得 $A = CBC^{-1}$．

七. （15 分）

设 $\boldsymbol{T}$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 上的一个线性变换. 证明：

（1）在 $P[x]$ 中有一次数 $\le n^2$ 的多项式 f(x)使 f($\boldsymbol{T}$)=0;

（2）若 f($\boldsymbol{T}$)=0 且 g($\boldsymbol{T}$)=0,那么，d($\boldsymbol{T}$)=0，这里 d(x)是 f(x)与 g(x) 的最大公因式；

（3）$\boldsymbol{T}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 有一常数不为零的多项式 $f(x)$ 使 f($\boldsymbol{T}$)=0.

八.（15 分）

设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$B = P^{-1}A^*P$，求 B+2E 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

九. （15 分）

设 A、B 是同阶方阵，

（1）如果 A、B 相似，证明：A、B 的特征多项式相等；

（2）请举一个例子说明（1）的逆命题不成立；

（3）如果 A、B 都是实对称矩阵，请证明（1）的逆命题一定成立.

十. （15 分）

已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $X=QY$，将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（3） 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.