

南京理工大学

2011 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 611

考试科目: 数学(单)(满分 150 分)

考生注意: 所有答案(包括填空题)按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不给分

一. 填空题: (共 50 分, 每小题 5 分)

1. 当 $a =$ _____ 时, $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续。

2. 设 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS =$ _____。

3. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = x + \int_0^2 f(x) dx$, 则 $f(x) =$ _____。

4. 设 $z = \sin(xy) + 2^y$, 则 $dz =$ _____。

5. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12$ 在点 $(1, 2, 1)$ 处的切平面方程为 _____。

6. 交换二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$ 的积分次序: _____。

7. 若 3 阶矩阵 A 满足 $|A| = |E + A| = |3E - A| = 0$, 则 A 的全部特征值是 _____。

8. 函数 $y = e^{2x}$ 的 n 阶麦克劳林公式(带佩亚诺型余项)是 _____。

9. R^3 的子空间 $W = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 | x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ 的维数 $\dim W =$ _____。

10. 当且仅当参数 k 满足条件 _____ 时, 三元实二次型

$$4x_1^2 + kx_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 \quad \text{正定。}$$

二. 选择题: (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

1. $x=0$ 是函数 $y=2+e^{-\frac{2}{|x|}}$ 的_____
- (A) 连续点 (B) 第一类间断点, 但非可去间断点
- (C) 第二类间断点; (D) 连续点或间断点不能由此确定。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \cos \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

则实常数 α 当 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导时必须满足 _____

- (A) $\alpha < -1$ (B) $-1 \leq \alpha < 0$ (C) $0 \leq \alpha < 1$ (D) $\alpha \geq 1$

3. 直线 $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 与平面 $x+y+z=1$ 的位置关系_____。

- (A) 直线在平面内 (B) 平行 (C) 垂直 (D) 相交但不垂直

4. 下列级数中, 发散的是_____

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 是 R^n 中的向量组, 则_____。

- (A) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示
- (B) β 不可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示
- (C) $r_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta\}} \leq n$
- (D) $r_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta\}} < n$

三. (8 分) 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix},$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩和一个极大线性无关组。

四. (8 分) 设 $f(x) = \int_x^1 \frac{\sin x}{x} dx$, 计算 $\int_0^1 xf(x)dx$.

五. (10 分) $\int_C (y \sin xy - y)dx + x \sin xy dy$, 其中曲线 C 为从点

$A(-1,1)$ 沿抛物线 $y = x^2$ 到原点 $O(0,0)$, 再沿直线 $y = x$ 到点 $B(1,1)$.

六. (12 分) 某工厂生产两种型号的机床, 其产量分别为 x 台和 y 台, 成本函数为

$$C(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy \quad (\text{万元})$$

若市场调查分析, 共需两种机床 8 台, 求如何安排生产, 总成本最少? 最小成本为多少?

七. (10 分) 求曲面积分 $\iint_{\Sigma} yzdzdx + 2zdx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$

被平面 $z = 1$ 所截部分的下侧。

八. (12 分) 设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 并使曲线积分

$\int_L [3f'(x) - 2f(x) + e^{2x}]ydx + f'(x)dy$ 与路径无关, 求函数 $f(x)$ 。

九. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 且矩阵 X 满足

$XA = B - 2X$, 试求出 X 。

十. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,

$f''(0) = 2$,

证明: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。