

河海大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称: 离散数学 (代码: 424)

一、判断题 (本题共 20 小题, 每小题 2 分, 满分 40 分)

(答题要求: 请用大写英文字母“T”表示正确, “F”表示错误)

- (1) 句子“本命题是假命题。”是命题。
- (2) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$
- (3) 设 G 为 n 个结点、 m 条边组成的简单有向图, 那么 $m \leq n(n-1)$ 。
- (4) 6 阶群的任何子群一定不是 4 阶的。
- (5) 含 n ($n \geq 1$) 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值。
- (6) 设 R_1 和 R_2 是集合上 A 的二元关系, 若 R_1 和 R_2 是传递的, 则 $R_1 - R_2$ 也是传递的。
- (7) 设 G 为无向图, 如果 G 中恰有两个奇度结点, 那么这两个奇度结点之间必有通路。
- (8) 命题 $\emptyset \subseteq \emptyset$ 、 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 、 $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 都是真命题。
- (9) 设 $\langle G, * \rangle$ 是独异点, 如果 $a, b \in G$ 且 a, b 均有逆元, 则 $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ 。
- (10) $\exists x F(x) \wedge \exists x \forall y G(x, y) \Rightarrow \exists x (F(x) \wedge \forall y G(x, y))$
- (11) 如果 G 为二部图且有奇数个结点, 那么 G 一定不是哈密顿图。
- (12) 设 R_1, R_2 都是集合 A 上的等价关系, 则 $R_1 \cup R_2$ 也是集合 A 上的等价关系。
- (13) 设 $\langle G, * \rangle$ 是群, $x \in G$, 则 x 与 x^{-1} 有相同的阶。
- (14) 设 G 为无向图, 如果 G 中恰有 n 个结点, $n-1$ 条边, 则 G 必为一棵树。
- (15) 一阶逻辑公式 $\exists x \forall y F(x, y) \rightarrow \forall y \exists x F(x, y)$ 是永真式。
- (16) 设 S 为 G 的非空子集, 且 $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子代数系统, 如果 $\langle G, * \rangle$ 是有限交换群, 则 $\langle S, * \rangle$ 也是交换群。
- (17) 设 $A=B=C$, 则 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ 。
- (18) 给定解释 I : 个体域为实数集合 R , $F(x, y): x = y$, $G(x, y): x < y$, 则公式 $\forall x \forall y (G(x, y) \rightarrow \neg F(x, y))$ 的真值为 1。
- (19) 设 $G = \{a, b, c\}$, G 上的二元运算 $*$ 如右表所示, 则 $\langle G, * \rangle$ 为交换半群。

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

- (20) 两个无向图同构的充分必要条件是它们的结点数、边的条数以及结点的度数列分别相等。

二、(本题满分 8 分)

求公式 $(p \vee \neg q) \rightarrow r$ 的主析取范式和主合取范式。

三、(本题满分 10 分)

设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 定义 A 上的关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ 。

- (1) 判断关系 R 的性质。
- (2) 求集合 A 上具有关系 R 的性质的关系共有多少个?

河海大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称: 离散数学 (代码: 424)

四、(本题满分 10 分)

已知有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle\}$.

- (1) D 中顶点 v_1 到 v_4 长度为 2, 4 的通路分别有几条?
- (2) D 中长度小于等于 4 的通路 (不含回路) 和回路分别有几条?

五、(本题满分 12 分)

设 A, B 都是有穷集合, 并设 A 是 m 元集, B 是 n 元集, 且 m, n 均大于 0.

- (1) 由 A 到 B 有多少个不同的关系?
- (2) 由 A 到 B 有多少个不同的函数?
- (3) 在什么条件下存在由 A 到 B 的单射函数? 共有多少个不同的单射函数?
- (4) 在什么条件下存在由 A 到 B 的双射函数? 共有多少个不同的双射函数?

六、(本题满分 12 分)

设 R 为实数集合, $G = \{(a, b) \mid a, b \in R, a \neq 0\}$, 定义 G 上的运算 $*$ 如下: 对于任意的 $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G$, $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \times a_2, b_1 \times a_2 + b_2)$, 其中 $+$ 、 \times 分别为实数的加法和乘法.

- (1) 证明 $\langle G, * \rangle$ 是群;
- (2) 设 $S = \{(1, b) \mid b \in R\}$, 证明 $\langle S, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群.

七、(本题满分 8 分)

设 G 为 n 个结点, m 条边组成的简单连通平面图, 而且图中没有长度小于等于 4 的圈, 证明 $3m \leq 5n - 10$.

八、(本题满分 10 分)

小李或小张是先进工作者。如果小李是先进工作者, 那么你一定知道。如果小张是先进工作者, 小赵也是先进工作者。你不知道小李是先进工作者。问谁是先进工作者? (要求使用等值演算解决该问题)

九、(本题满分 12 分)

设 $\langle G, * \rangle$ 为交换群, 定义 G 上的关系 R 如下: 设 $a, b \in G$,

$$aRb \text{ 当且仅当 } a * b^{-1} = b * a^{-1}$$

- (1) 证明 R 是 G 上的等价关系;
- (2) 设 $N_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 对于 $i, j \in N_6$, $i \oplus j = (i + j) \pmod{6}$ 。假设交换群 $\langle G, * \rangle$ 为 $\langle N_6, \oplus \rangle$, 则对于集合 N_6 , 给出上述等价关系 R 所确定的划分。

十、(本题满分 12 分)

设 $\langle S_1, \oplus, \times \rangle$ 和 $\langle S_2, +, \cdot \rangle$ 是两个格, 在 $S_1 \times S_2$ 上规定运算 \vee 和 \wedge 如下: 对于 $\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in S_1 \times S_2$, 定义

$$\langle a_1, b_1 \rangle \vee \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 \oplus a_2, b_1 + b_2 \rangle$$

$$\langle a_1, b_1 \rangle \wedge \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 \times a_2, b_1 \cdot b_2 \rangle$$

河海大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称: 离散数学 (代码: 424)

- (1) 证明: $\langle S_1 \times S_2, \vee, \wedge \rangle$ 是一个格。
- (2) 给出 $S_1 \times S_2$ 上对应的偏序关系。
- (3) 若 S_1 和 S_2 都是有界的, 则 $S_1 \times S_2$ 也是有界的。

十一、(本题满分 16 分)

首先将下列命题符号化然后采用构造证明法分别构造推理的证明。

(答题要求: 命题 (1) 在命题逻辑中符号化并构造推理的证明; 命题 (2) 在谓词逻辑中符号化并构造推理的证明)

(1) 只要今天天气不好, 考生就不能提前进入考场; 当且仅当考生提前进入考场, 考试才能准时进行。所以, 如果考试准时进行, 那么今天天气就好。

(2) 每个考生或者勤奋或者聪明。所有勤奋的考生都将有所作为。并非所有考生都将有所作为。所以一定有些考生是聪明的。(个体域为考生的集合)