河海大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：离散数学　　（代码：424 ）

一、判断题（本题共 20 小题，每小题 2 分，满分 40 分）

（答题要求：请用大写英文字母“T”表示正确，“F”表示错误）

（1）公式$\forall x F(x) \vee \neg \exists x G(x)$的前束范式为$\forall x(F(x) \vee \neg G(x))$。

（2）设$f: N\times N \to N$，N 是自然数集，$f(<x,y>)=|x^2-y^2|$，则 f 是满射的，但不是双射的。

（3）设 G 是 n 个结点的 m 条边的简单有向连通图，那么$n-1 \le m \le n(n-1)/2$。

（4）已知个体域为{2，3}，如果$L(2,2)=L(3,3)=1$，$L(2,3)=L(3,2)=0$，那么$\exists y \forall x L(x,y)$的真值为 0。

（5）句子“理发师只给那些不给自己理发的人理发”是命题。

（6）6 个结点可以形成 6 种不同构的树。

（7）$\forall x,y \in Z^+$，运算$x*y=lcm(x,y)$，即求 x 和 y 的最小公倍数，满足交换律、幂等律和消去律。

（8）已知集合 A、B、C、D，则$A\times B \subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C \wedge B\subseteq D$。

（9）公式$\forall x F(x) \to (\exists x \exists y G(x,y) \to \forall x F(x))$是永真式。

（10）设 R 是非空集合 A 上的关系，R 是反对称关系当且仅当$R\cap R^{-1} \subseteq I_A$。

（11）设 G 为无向图，若 G 中恰有 n 个结点，n-1 条边，则 G 必为一棵树。

（12）已知集合 A、B，A-B=A 当且仅当 B=∅。

（13）对任意一个二元关系依次求自反闭包、传递闭包、对称闭包后，得到的新关系一定是等价关系。

（14）设 G 是 n（n≥3）阶哈密顿图，则 G 中任意两个不相邻的顶点的度数之和均不小于 n。

（15）设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，使得$R^s=R^t$。

（16）在一个三元集合上共可定义 256 个不同的二元关系。

（17）设<G, *>是群，|G|=n，设$x\in G$，若$x^m=e$，则 m|n。

（18）设 A、B 均为非空集合，若$2^A=2^B$，则 A=B。

（19）设 G 为有向图，如果 G 是强连通的，则 G 中一定有欧拉回路。

（20）设<G, *>是有限循环群，则 G 中必有一个元素的阶与群的阶相等。

二、（本题满分 8 分）

求命题公式$(p\to q) \wedge (q\to r)$的主合取范式与主析取范式。

三、（本题满分 8 分）

假设 A={a，b，c，d，e}，π={{a，b}，{c}，{d，e}}是 A 上的一个划分。

（1）给出该划分 π 所确定的等价关系 R。

（2）问 A 上可定义多少个不同的等价关系？（要求给出计算过程）

四、（本题满分 10 分）

设 G 是群，H，K 是 G 的子群。请分别判断下述命题的正确性，并加以论证。

（1）H∩K 是 G 的子群。

（2）H∪K 是 G 的子群。

机密★启用前　　秘密★启用后　　　　请务必将所有答案写在专用答题纸上

河海大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

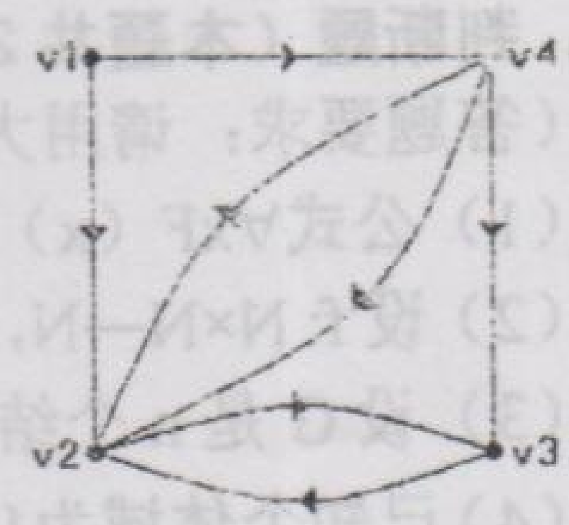
考试科目名称：离散数学　　（代码：424　）

五、(本题满分 12 分)

设 A 是有向图 G 的邻接矩阵，A^k 是邻接矩阵 A 的 k 次幂

(1) 证明：A^k 中的第 i 行第 j 列元素 $a_{ij}^{(k)}$ 等于 G 中结点 vi 和 vj 之间长度为 k 的通路的条数。

(2) 求出右图所示的有向图中长度为小于等于 4 的通路和回路分别有几条？



六、(本题满分 10 分)

设集合 X 上二元关系 R，若 R 满足反自反，反对称和传递性质，则称 R 为 X 上的严格序关系。证明：

(1) 若 S 为 X 上的偏序关系，则 $S-I_X$ 是 X 上的严格序关系。

(2) 若 S 为 X 上的一个严格序关系，则 $S\cup I_X$ 是 X 上的偏序关系。

七、(本题满分 12 分)

假设传输一段仅由数字 1、2、3、4、5、6、7 组成的信息，经统计平均每传输长度为 100 个数字的信息，1、2、3、4、5、6、7 出现的次数分别为 20、19、18、17、15、10、1。

(1) 若使用等长编码的方法，传输长度为 10^n ($n\geq 2$) 个数字的上述信息至少需要多少比特？

(2) 若采用不等长的 Huffman 编码，那么如何对数字 1、2、3、4、5、6、7 进行编码？与 (1) 中结果相比，同样传输长度为 10^n ($n\geq 2$) 个数字的上述信息可以节省多少比特？（要求画出 Huffman 编码树）

八、(本题满分 8 分)

设 X 为一非空集合，设 $\chi_A: X\to\{0,1\}$ 为 X 上的特征函数，即对于任意的 $A\subseteq X$，

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

再设 $\Phi: P(X)\to\{0,1\}^X$，即对于任意的 $A\subseteq X$，$\Phi(X)=\chi_A$，证明 Φ 是双射函数。

九、(本题满分 12 分)

有人问甲、乙、丙、丁四人谁的成绩最好，甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”。已知四人的回答只有一人符合实际，请使用命题逻辑的相关方法判断谁的成绩最好？

十、(本题满分 10 分)

证明集合代数 $\langle P(S),\cap,\cup,\sim,\varnothing,S\rangle$ 是布尔代数。

十一、(本题满分 10 分)

在一阶逻辑中，采用构造证明法证明如下命题：“对于任意的集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subset C$，那么 $A\subset C$。”

河海大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：离散数学　　（代码：424）

十二、（本题满分 10 分）

有 11 个学生打算几天都在一个圆桌上共进晚餐，并且希望每次晚餐时，每个学生两边邻座的人都不相同。

（1）按照这样的要求，问他们可以在一起共进晚餐最多几天？

（2）如果用数字 1~11 表示这 11 个学生，给出这几天的座位排列情况。