

# 苏 州 大 学

## 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

1. (12 分) 计算：

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2} + \cdots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} \right),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{2}{x^2}}.$$

2. (10 分) 设  $(x_0, y_0, z_0)$  是方程组  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  的解，证明：

$$9 - 5\sqrt{3} \leq x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leq 9 + 5\sqrt{3}.$$

3. (10 分) 设  $x^2 = vw, y^2 = uw, z^2 = uv, f(x, y, z) = F(u, v, w)$ ，证明：

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

4. (12 分) 设  $y_n = px_n + qx_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$ ，其中  $|p| < |q|$ 。证明：数列  $\{y_n\}$  收敛时，数列  $\{x_n\}$  也收敛。

5. (14 分) 设函数  $f$  义在  $(a, +\infty)$  上有定义，并且在每一个有限区间  $(a, b)$  内有界，

(a) 证明：如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$ ，证明：

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

(b) 举出反例说明当  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \infty$  时，未必

成立  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

6. (12 分) 设  $f(x)$  是以  $T$  为周期的周期函数, 且  $\frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = C$ ,

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x^2} dx = C$ 。

7. (15 分) 设函数  $f(x)$  在整个实数轴有连续的三阶导函数, 证明:

存在实数  $a$ , 使  $f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0$ 。

8. (15 分) 设半径为  $r$  的球面  $S$  的球心在半径为常数  $a$  的定球面上,

试证明: 当  $r = \frac{4}{3}a$  时,  $S$  位于定球面内部部分的面积最大。