2004年苏州大学高等代数考研试题及答案

一(15')求满足下列条件的X

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

解;$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&1&-1\\\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

二(15‘)设P是一个数域，p(x)是P[x]中次数大于0的多项式，

证明：如果对于任何多项式f(x),g(x),由p(x)|f(x)g(x)可以推出p(x)|f(x)或p(x)|g(x),那么p(x)是不可约多项式。

证明：假设p(x)是可约多项式，则存在$p_1(x)$,$p_2(x)$

使得$p(x)=p_1(x)p_2(x)$,且$\partial(p_i(x))<\partial(p(x))$, i=1,2

取$f(x)=p_1(x)$,$g(x)=p_2(x)$,因此$f(x)g(x)=p(x)$

则p(x)|f(x)g(x)

但p(x)不整除f(x)且不整除g(x)与题设矛盾！

所以p(x)是不可约多项式

三（25’）设σ是数域P上的n维向量空间V的一个线性变换，$\sigma^2=\sigma$，证明：

(1) $\sigma^{-1}(0)=\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

(2) $V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$

(3) 如果τ是V的线性变换，$\sigma^{-1}(0)$，$\sigma(V)$都是τ的不变子空间，则有$\sigma\tau=\tau\sigma$

证明：（1）$\forall\alpha\in V$，则$\sigma(\alpha-\sigma(\alpha))=\sigma(\alpha)-\sigma^2(\alpha)=\sigma(\alpha)-\sigma(\alpha)=0$

则$\alpha-\sigma(\alpha)\in\sigma^{-1}(0)\Rightarrow\sigma^{-1}(0)\supseteq\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

又取$\beta\in\sigma^{-1}(0)$，$\sigma^2(\beta)=0,\beta=\beta-\sigma(\beta)\Rightarrow\beta\in\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

$\Rightarrow\sigma^{-1}(0)\subseteq\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

所以$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$

(2) $\forall\alpha\in V$，则$\alpha-\sigma(\alpha)\in\sigma^{-1}(0)$

$\alpha=\alpha-\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)\in\sigma^{-1}(0)+\sigma(V)$

即$V=\sigma^{-1}(0)+\sigma(V)$

任取$\beta\in\sigma^{-1}(0)\cap\sigma(V)$，则$\sigma(\beta)=0$

$\forall\alpha\in V$，使得$\beta=\sigma(\alpha)$

从而$\beta=\sigma(\alpha)=\sigma^2(\alpha)=\sigma(\sigma(\alpha))=\sigma(\beta)=0$

所以$\sigma^{-1}(0)\cap\sigma(V)=\{0\}$

因此$V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$

（3）因为$\sigma^{-1}(0)$，$\sigma(V)$是τ的不变子空间

$\forall\alpha\in\sigma^{-1}(0)$，$\beta\in\sigma(V)$，$\gamma\in V$，且$\gamma=\alpha+\beta$

$\tau(\alpha)\in\sigma^{-1}(0)$，$\tau(\beta)\in\sigma(V)$，$\sigma(\tau(\alpha))=0$，$\sigma(\tau(\beta))=\tau(\beta)$

$\sigma\tau(\gamma)=\sigma(\tau(\gamma))=\sigma(\tau(\alpha+\beta))=\sigma(\tau(\alpha)+\tau(\beta))=\sigma(\tau(\beta))=\tau(\beta)$

$\sigma(\alpha)=0$，$\sigma(\beta)=\beta$

$\tau\sigma(\gamma)=\tau(\sigma(\gamma))=\tau(\sigma(\alpha+\beta))=\tau(\sigma(\alpha)+\sigma(\beta))=\tau(\beta)$

从而$\sigma\tau(\gamma)=\tau\sigma(\gamma)\Rightarrow\sigma\tau=\tau\sigma$

四（20）设σ是数域P上的向量空间V的一个线性变换，α_1是σ属于特征值λ的特征向量，向量组α_1，α_2，……α_s满足关系

（σ-λE）α_{i+1}=α_i，i=1，2

证明：α_1，α_2，　　　α_s

证明：因为（σ-λE）α_{i+1}=α_i

所以$\sigma(\alpha_{i+1})=\alpha_i+\lambda\alpha_{i+1}$，i=1，2

设$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \quad {}_s\alpha_s = 0, \quad \sum_{i=1}^{s} {}_i\alpha_i = 0$

$\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \quad {}_s\alpha_s) = 0$

$k_1\sigma(\alpha_1)+\sum_{i=1}^{s-1}k_{i+1}\sigma(\alpha_{i+1})=0$, i=1，2　　… s-1

$\Rightarrow \lambda k_1\alpha_1+\sum_{i=1}^{s-1}k_{i+1}\alpha_i+\lambda\sum_{i=1}^{s-1}k_{i+1}\alpha_{i+1}=0$

$\Rightarrow \lambda\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{s-1}k_{i+1}\alpha_i=0$,由于 $\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s-1}k_{i+1}\alpha_i=0$

$So, k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + \quad {}_{s-1}\alpha_s = 0$

$\sigma(k_2\alpha_1 + k_3\alpha_2 + \quad {}_{s-1}\alpha_s) = 0$

重复上述过程可得$k_3\alpha_1 + k_4\alpha_2 + \quad {}_{s-2}\alpha_s = 0$

继续重复上述过程，我们有$k_s\alpha_1=0$，因为α_1显然不为0，所以$k_s=0$

从而我们有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \quad {}_{s-1}\alpha_{s-1} = 0$

再继续上面步骤，可得$k_{s-1}\alpha_1=0 \Rightarrow k_{s-1}=0$

由归纳法得$k_1=k_2= \quad \cdots {}_s = 0$

因此α_1，α_2，…… α_s线性无关

五(20)用正交线性替换三元二次型

$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$

为标准型,并给出所用的正交线性替换.

解:设A为二次型矩阵, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

令 $|\lambda E-A|=0$

即 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$

$\lambda_{1,2}=2, \lambda_3=-7$

对应于 $\lambda_{1,2}=2$ 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1), \xi_2=(2,0,1)$

对应于 $\lambda_3=-7$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,2,-2)$

正交化

令 $\alpha_1=(0,1,1)$

$\alpha_2=\xi_2-\frac{(\alpha_1-\xi_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=(2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\alpha_3=(1,2,-2)$

从而令 $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

从而 $C'AC=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

令 $X=CY$

则 $f(x_1, x_2, x_3)=X'AX=(CY)'A(CY)=Y'C'ACY=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$

六(15)设A,B为两个n阶方阵,$r(A)=r(B)=n-1$,其中$n>1$

齐次线性方程组AX=0与BX=0同解,证明:A^*的非零列与B^*的非零列的非零列成比例,其中A^*,B^*分别是A,B的伴随矩阵.

证明:since $r(A)=r(B)=n-1$

$so, r(A^*)=r(B^*)=1$

$because, AA^*=|A|E=0, BB^*=|B|E=0$

$\Rightarrow A^*$的列向量是AX=0的解,B^*的列向量是BX=0的解

For,AX=0与BX=0同解

设α是A^*的非零列,β是B^*的非零列

$\Rightarrow \alpha = k\beta$

七(15)设σ, τ是n维欧式空间V的线性变换,对任意$\alpha,\beta\in V$,都有$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta))$,证明:$\sigma$的核等于$\tau$的值域的正交补

证明:$\forall\alpha\in\ker\sigma$, so, $\sigma(\alpha)=0$

$\Rightarrow (\alpha,\tau(\beta))=(\sigma(\alpha),\beta)=(0,\beta)=0$

$\Rightarrow \alpha\in\tau^{\perp}(V)\Rightarrow \ker\sigma\subseteq\tau^{\perp}(V)$..(1)

$and, \forall\beta\in\tau^{\perp}(V), \Rightarrow (\beta,\tau(\beta))=0$

$\Rightarrow (\sigma(\beta),\beta)=(\beta,\tau(\beta))=0\Rightarrow \sigma(\beta)=0\Rightarrow \beta\in\ker\sigma,$

$\Rightarrow \tau^{\perp}(V)\subseteq\ker\sigma$...(2)

According(1)and(2)WeCanSee

$\tau^{\perp}(V)=\ker\sigma$

八(15)设M是数域P上的n阶方阵$(n>1)$, $f(x),g(x)\in P[x]$且$(f(x),g(x))=1$
$A=f(M),B=g(M),W,W_1,W_2$分别是方程组$ABX=0,AX=0,BX=0$的解空间, 证明: c.

证明: (1)$\forall \alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2$

$A\alpha_1=0\Rightarrow f(M)\alpha_1=0\Rightarrow AB\alpha_1=f(M)g(M)\alpha_1=g(M)f(M)\alpha_1=0$

$\Rightarrow \alpha_1\in W\Rightarrow W_1\subseteq W$

同样$W_2\subseteq W$

$\Rightarrow W_1+W_2\subseteq W$

(2)$because,(f(x),g(x))=1,so,\exists u(x),v(x)\in P[x]$

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1\Rightarrow u(M)f(M)+v(M)g(M)=E$

$\forall \alpha\in W_1\cap W_2, A\alpha=0,B\alpha=0,\Rightarrow f(M)\alpha=0,g(M)\alpha=0$

$\Rightarrow (u(M)f(M)+v(M)g(M))\alpha=E\alpha\Rightarrow \alpha=0$

$\Rightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$

(3)$since, W_1+W_2\subseteq W$

$so, \dim(W_1+W_2)\le\dim(W)$

$Also, W_1\cap W_2=\{0\}\Rightarrow \dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$

$\Rightarrow \dim(W_1)+\dim(W_2)\le\dim(W)$..(1)

$Still, r(A)+r(B)\le n+r(AB)$

$\Rightarrow n-\dim(W_1)+n-\dim(W_2)\le n+n-\dim(W)$

$\Rightarrow \dim(W_1)+\dim(W_2)\ge\dim(W)$..(2)

$From,(1)and(2),$

$\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W)$

also, $W_1\cap W_2=\{0\}$

$\Rightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$

九(10)设V是数域P 上的n维线性空间，σ，τ是V的线性变换，σ有n个互异的特征值，证明：τ与σ可交换的充分必要条件是：τ是E，σ，σ^2，..........σ^{n-1}的线性组合，其中E是恒等变换.

证明：$\Rightarrow$因为$\tau\sigma=\sigma\tau$，设λ_i是σ的n个互异的特征值，α_i是属于λ_i的特征向量

则α_i也是τ的特征向量

(事实上，对于每个$\alpha_i(i=1,2.........n)$有$\sigma(\tau(\alpha_i))=\sigma\tau(\alpha_i)=\tau\sigma(\alpha_i)=\tau(\sigma(\alpha_i))=\tau(\lambda_i\alpha_i)=\lambda_i\tau(\alpha_i)$

从而$\tau(\alpha_i)\in V_{\lambda_i}$，由于$\lambda_i$互异，所以$\dim(V_{\lambda_i})=1,(i=1,2.........n)$

故α_i也是τ的特征向量）

从而$\exists u_i\in V$，使$\tau(u_i)=u_i\alpha_i,(i=1,2.........n)$

于是有$\sigma(\alpha_1,\alpha_2.........\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2.........\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\tau(\alpha_1,\alpha_2.....\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2.........\alpha_n)\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix}$

考虑方程组$\begin{cases} x_1+\lambda_1x_2+........\lambda_1^{n-1}x_n=u_1 \\ x_1+\lambda_2x_2+........\lambda_2^{n-1}x_n=u_2 \\ .... \\ x_1+\lambda_nx_2+........\lambda_n^{n-1}x_n=u_n \end{cases}$ ....(1)

由于系数行列式$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$($\lambda_i$互异）

则方程组有唯一解，设为（$a_1,a_2......a_n$)′

则$a_1+\lambda_ia_2+.........\lambda_ia_n=u_i,(i=1,2.........n)$

即（$a_1+\lambda_ia_2+.........\lambda_i^{n-1}a_n$）$\alpha_i=u_i\alpha_i$

得（$a_1\varepsilon+a_2\sigma(\alpha_i)+.........a_n\sigma^{n-1}(\alpha_i)$）$=\tau(\alpha_i)$

由于$\alpha_1,\alpha_2........\alpha_n$是$V$的一组基，因此$\tau=a_1\varepsilon+a_2\sigma(\alpha_i)+.........a_n\sigma^{n-1}(\alpha_i)$

所以τ是E，σ，σ^2，..........σ^{n-1}的线性组合