2005年苏州大学数学分析考研试题及答案

考研加油站收集整理 http://www.kaoyan.com

1.(20')求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n},(0<a\le b)$

解：因为 $\sqrt[n]{b^n}<\sqrt[n]{a^n+b^n}\le\sqrt[n]{2b^n}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2b^n}=b$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=b$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{f(x)-f(a)}-\dfrac{1}{(x-a)f'(a)}\right)$，其中 $f'(a)\neq 0, f''(a)$ 存在

解：由于 $f'(a)\neq 0, f''(a)$ 存在，从而 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2}+o((x-a)^2)$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{(x-a)f'(a)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)f'(a)-(f(x)-f(a))}{(f(x)-f(a))(x-a)f'(a)}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)f'(a)-(f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+o((x-a)^2))}{(x-a)f'(a)(f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+o((x-a)^2))}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+o((x-a)^2)}{(x-a)f'(a)(f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+o((x-a)^2))}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-\frac{1}{2}f''(a)}{f'(a)(f'(a)+f''(a)\frac{(x-a)}{2}+o((x-a))}=-\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}$$

2.(18')设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(x)$ 的每一个零点都是简单零点，即若 $f(x_0)=0$ 则 $f'(x_0)\neq 0$.证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点。

证明：设若不然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有无穷多个零点，不妨设 $\{x_n\}\subset[0,1], f(x_n)=0, n=1,2$

则存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$ 且 $f(x_{n_k})=0$，从而 $f(x_0)=0$

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_{n_k})-f(x_0)}{x-x_0}=0$ 与题设相矛盾！

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点。

3.(20')设$f(x)$是R上的2π周期函数，满足：

(1)$\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$

(2)$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|,\forall x,y\in R$

证明：（1）f(x)在R上可以取到最大值，最小值

（2）$\max_{x\in R}|f(x)|\le \pi L$

证明：（1）由$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|,\forall x,y\in R$知

$\forall \varepsilon>0,\exists\delta>0$,取$x_0\in[0,2\pi],\forall x\in[0,2\pi]$,当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|$

取$\delta<\dfrac{\varepsilon}{L}$,则有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$

从而$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续，既$f(x)$在$[0,2\pi]$上可以取到最大值，最小值

又$f(x)$是R上的2π周期函数，所以f(x)在R上可以取到最大值，最小值。

（2）令$f(x_M)=\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$

由$\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$知$\exists x_0\in[0,2\pi]$，使得$f(x_0)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$

以下分三种情况讨论：

(a)当$x_M=x_0$时

$f(x_M)=f(x_0)=0\Rightarrow \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|=0\le\pi L$

(b)当$x_M>x_0$时,由f(x)的周期性，得

$2|f(x_0)-f(x_M)|=|f(x_0)-f(x_M)|+|f(x_0+2\pi)-f(x_M)|\le L(x_0-x_M)+L(x_0+2\pi-x_M)=2\pi L$

(c)当$x_M<x_0$时,由f(x)的周期性，得

$2|f(x_0)-f(x_M)|=|f(x_M)-f(x_0)|+|f(x_M+2\pi)-f(x_0)|\le L(x_0-x_M)+L(x_M+2\pi-x_0)=2\pi L$

从而由(a)，(b),(c)知道$\max_{x\in R}|f(x)|\le\pi L$

4.(16')将方程$x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$变为以极坐标r,$\theta$为自变量的形式，其中极坐标变换为x=rcos$\theta$, y=rsin$\theta$,(r$\ne$0)

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot r\cdot(-\sin\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot r\cdot\cos\theta$$

因此$x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=r\cdot\cos\theta\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\sin\theta+r^2\cos^2\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}-\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot r\sin\theta\cos\theta+r^2\sin^2\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=r^2\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$

所以方程为$r^2\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=0$

5.(20′）设数列$\{a_n\}$有极限L，证明

（1）f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在（$-1,1$）上有定义

(2) $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=L$

证明：(1) 因为$\lim_{n\to\infty} a_n = L$,若$L \neq 0$,则有$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

(事实上$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|=\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right|\le\frac{|a_{n+1}-L|+|a_n-L|}{|a_n|}<\frac{1}{|A|}\cdot 2\varepsilon$)

所以$L\neq 0$时，f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛区间为（$-1,1$）

从而f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在（$-1,1$）上有定义

若L=0, 则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，$\exists N$,当$n>N$时,$\sum_{n}^{2n} a_n x^n \to 0$,(当$x\in$（$-1,1$））

所以L=0时f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在（$-1,1$）上有定义

(2) $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f(x)=\lim_{x\to 1^-}(f(x)-xf(x))=\lim_{x\to 1^-}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1})$

$=\lim_{x\to 1^-}(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1})=\lim_{x\to 1^-}(a_1 x+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1})$

$=\lim_{x\to 1^-}(a_1 x+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)x^{n+1})=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=a_1+\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=L$

6.(20')求由圆锥体$z \geq \sqrt{x^2+y^2}$和球体$x^2+y^2+(z-a)^2 \leq a$所围成的立体体积，其中$a>0$.

解：$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+(z-a)^2=a \end{cases} \Rightarrow 2z^2-2az+a^2-a=0$

(1)当$2a-a^2<0$时，即$a>2, or, a<0$时

圆锥体与球体不相交，从而所围体积为0

（2）当$2a-a^2=0$时，即$a=2, or, a=0$时

(a) $a=0$时，球体缩为一个点，从而所围体积为0

(b) $a=2$时, 圆锥体与球体相切，此时z=1

令$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V=\iiint dxdydz=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^{a-\sqrt{a-r^2}} rdz=2\pi(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}(a-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}})$$

(3)当$2a-a^2<0$时，即0<a<2时，圆锥体与球体相交

$$V=\iiint dxdydz=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^{a+\sqrt{a-r^2}} rdz=2\pi(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}(a-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}})$$

7.(18‘）将函数$f(x)=\{\begin{matrix} -\frac{\pi}{4},-\pi<x<0 \\ \frac{\pi}{4},0\le x<\pi \end{matrix}$ 展成$Fourier$级数，

并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$的和。

解：显然$f(x)$在$[-\pi，\pi]$上是奇函数

因此$a_n=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)dnx$$

$$=\frac{1}{2}(-1)\frac{1}{n}\cos(nx)|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\cos(n\pi)+\frac{1}{2n}=(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n-1}$$

所以$f(x)$ ~ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin nx$

(2)因为$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx)$有界，$\frac{1}{2n-1}$单调递减$\to 0(n\to\infty)$

所以由Arbel判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin nx$收敛

由帕塞瓦尔等式知：$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})$

即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\pi}{4})^2dx=\frac{\pi^2}{8}$