苏 州 大 学

二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学　　　考试科目：数学分析（B卷）

运筹学与控制论、金融数学、系统生物学

（共四大题，总分 150 分；答案写在答卷纸上，并请写明相应题号）

一、下列命题中正确的给予证明，错误的举反例或说明理由．共 6 题，计 30 分．

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 则 $\exists N>0$, 对 $\forall \varepsilon>0$ 及 $\forall n\ge N$, 都有 $|a_n - A|<\varepsilon$.

2. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续且无界，则一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$.

3. 设 $a_n\ge 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

4. 存在一个在有界区间 (a,b) 上连续且有界但非一致连续的函数 $f(x)$.

5. 设 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是单调函数，则 $f'(x)$ 连续.

6. 设 f 连续，非负，且 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

二、下列 4 题每题 15 分，计 60 分．

1. 确定实数 a,b 使得下面定义的函数连续：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(1+x)^a-1}{x}, & x>0,\\ bx+1, & -1\le x\le 0,\\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}, & x<-1.\end{cases}$$

2. 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，试将累次积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2+x}^{x+1} f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序.

3. 计算 $I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $0\le z\le h$ 部分的下侧.

4. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是非负实数，证明算术－几何平均值不等式 $\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, 并给出成立等式的条件.

（还有第2页）

注意：答案请不要做在试题纸上。

苏 州 大 学

二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学 运筹学与控制论、金融数学、系统生物学　　考试科目：数学分析 (B卷)

三、下列 2 题每题 15 分，计 30 分.

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx=0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\int_a^\xi f(x)dx=f(\xi)$.

2. (1) 称函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是满足性质 P 的，假如 $a\le g(a)$, $g(b)\le b$. 证明：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足性质 P, 则至少在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2},b]$ 的其中一个区间上 $f(x)$ 也满足性质 P;

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加 (不一定连续), 且满足性质 P. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

四、下列 3 题选做 2 题，计 30 分.

1. (1) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(a_{n+1})-f(a_n)|=0$;

(2) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续，证明存在数列 $\{a_n\}$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}-a_n|=0$, 但 $n\to\infty$ 时 $|f(a_{n+1})-f(a_n)|$ 不趋于 0.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. 证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 上处处收敛；

(2) $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f(x)=L$, 其中 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.

3. (1) 证明不等式 $\dfrac{1}{200}<\displaystyle\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx<\frac{1}{100}$;

(2) 估计积分 $\displaystyle\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$ 的近似值，使误差不超过 10^{-5}.

注意：答案请不要做在试题纸上。