苏 州 大 学

二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学　　考试科目：高等代数（B卷）

运筹学与控制论、金融数学、系统生物学

一、填空题：（每小题6分，共30分）

1. 已知$(x-1)^2$整除Ax^4+Bx^2+1，则$A=$________,$B=$_________。

2. 已知A,B是n阶可逆矩阵，E为n阶单位阵，$X=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & E\end{pmatrix}$，则

   $X^{-1}=$______________。

3. 令A为实数域上的3阶可逆阵，若行列式$|A^*|=|-2A^{-1}|$，其中A^*为A的伴随矩阵，则$|A|=$______。

4. 设V是数域P上全体次数小于4的多项式与零多项式组成的线性空间，且$x^3,x^3-x,x^2+1,x+1$是V的一组基，则x^2+2x+3在这组基下的坐标写成行向量为______________________。

5. 已知三维欧氏空间V的一组基为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，度量矩阵为

   $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则向量$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$的长度为________。

二、（20分）设A,B为数域P上的n阶方阵，E为n阶单位阵。

1. 证明：$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$，其中$rank(\ )$为矩阵的秩；

2. 若$A^2=E$，证明：$rank(A+E)+rank(A-E)=n$。

三、（20分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}。$$

注意：答案请不要做在试题纸上。

苏 州 大 学

二〇〇九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学　　考试科目：高等代数（B卷）

运筹学与控制论、金融数学、系统生物学

四、（20分）令 A,B 是 $n\times n$ 正交矩阵。证明：

1. 若行列式 $|A|=-1$，则 -1 是 A 的特征值；

2. 若 $|A|+|B|=0$，则 $|A+B|=0$。

五、（20分）令 $J(0,n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为复数域 C 上的 $n\times n$ 矩阵。

1. 求 $(J(0,n))^2$ 的最小多项式；

2. 计算特征矩阵 $\lambda E-(J(0,n))^2$ 的行列式因子，不变因子，初等因子；

3. 给出 $(J(0,n))^2$ 的若当标准形。

六、（20分） 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的线性变换。任给 F 上两个互素多项式 $h_1(x),h_2(x)$，令 $g(x)=h_1(x)h_2(x)$。若 $g(\sigma)=0$（零变换），证明：$V=\ker h_1(\sigma)\oplus\ker h_2(\sigma)$，其中，$\ker h_i(\sigma)$ 是线性变换 $h_i(\sigma)$ 的核，$i=1,2$。

七、（20分）设 A 为一个 n 阶实方阵，且它的行列式 $|A|\neq 0$。证明：存在一个正交矩阵 Q 和一个上三角矩阵 T，使得 $A=TQ$。

注意：答案请不要做在试题纸上。