苏 州 大 学

2010年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、金融数学　　考试科目：高等代数（B）卷

注意：以下各题中，A^T、$|A|$、$\mathrm{rank}(A)$ 分别表示矩阵A的转置矩阵、行列式、秩；$\ker(\sigma)$ 表示线性变换σ的核；$\bigoplus$表示直和，$\mathbb{R}$表示实数域.

1. (20分)求非负整数m,n,k,使得x^2-x+1整除$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3k+2}$.

2. (20分) 设$n\times n$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求A 的不变因子组和初等因子组；

(2) 写出A 的Jordan标准形.

3. (20分) 设A,B,C均为n阶方阵,A,B是可逆的. 求分块矩 $\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$的逆矩阵.

4. (20分) 设A是$m\times n$阶矩阵. 证明:非齐次线性方程组$Ax=b$有解的充分必要条件是:若$A^Ty=0$,则$b^Ty=0$.

5. (20分) 设V是$\mathbb{R}$上线性空间,σ是V的线性变换,多项式$g(x)=x^3-2x^2$. 若$g(\sigma)=0$, 证明：

$$V=\ker(\sigma^2)\bigoplus\ker(\sigma-2).$$

6. (25分)设A,B是任意两个正定矩阵,满足$AB=BA$.求证

(1) 必存在一个n阶的正交矩阵P,使得P^TAP,P^TBP均为对角矩阵；

(2) AB也是正定矩阵.

7. (25分) 设J,X均是$n\times n$阶实矩阵,J的各行各列元素都是1.证明：$X=XJ+JX$只有零解$X=0$.

注意：答案请不要做在试题纸上。