苏 州 大 学

2011 年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码： 831 科目名称： 高等代数 满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在$\boxed{\text{答题纸}}$上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

(注意：1-5题每题20分,第6,7题25分,共150分,其中：A^T、$|A|$、$\mathrm{rank}(A)$ 分别表示A的转置矩阵、行列式、秩；E 表示单位矩阵.)

1. 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ -b & a & b & \cdots & b & b \\ -b & -b & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ -b & -b & -b & \ddots & a & b \\ -b & -b & -b & \cdots & -b & a \end{vmatrix}.$$

2. 设$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$T$, 使$T^{-1}AT$为Jordan形矩阵.

3. 设A为n阶正交矩阵且特征值不等于-1.证明:

   (a) $E+A$是可逆矩阵;

   (b) $(E-A)(E+A)^{-1}$是反对称矩阵.

4. 设A, B都是$m \times n$阶矩阵. 证明:齐次线性方程组$AX=0, BX=0$同解的充分必要条件是存在可逆矩阵P，使得$B=PA$.

5. 设A是n阶可逆实对称矩阵,S是实反对称矩阵且$AS=SA$.证明:$A+S$是可逆矩阵.

6. 设A为数域$\mathbb{F}$上的n阶方阵.证明：A是对合矩阵(即$A^2=E$)的充要条件是

$$\mathrm{rank}(A+E)+\mathrm{rank}(A-E)=n.$$

7. 设A是一任意n阶方阵,$m(x)$和$f(x)$分别是它的最小多项式和特征多项式.证明：$f(x)$整除$m(x)^n$.