

苏州大学

2011 年硕士研究生入学考试初试试题 (B 卷)

科目代码: 619 科目名称: 高等数学 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

1. 求下列极限和积分 (每小题 4 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x^3+4x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x^2-2x}$

(5) $\int e^x \sin x dx$

(6) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

2. 证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且不超过 $a+b$. (10 分)

3. 求曲线 $y = 3 \cos x \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处的切线和法线方程. (10 分)

4. 证明双曲线 $xy = a^2$ 在任一点处的切线和坐标轴构成的三角形面积都为 $2a^2$. (10 分)

5. 已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t = \pi/6$ 处的值. (10 分)

6. 求由 $x - y + \frac{1}{3} \sin y = 0$ 所确定的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$. (10 分)

7. 证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$. (10 分)

8. 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 10z = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. (10 分)

9. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 9$ 在 $(3, 2, 4)$ 点处的切平面和法线方程. (12 分)

10. 计算 $\iint_D e^{-x^2/2-y^2/2} dx dy$, 其中 D 为中心在原点, 半径为 1 的圆周所围成的闭区间. (12 分)

11. 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 为抛物线 $y = 4x^2$ 上从 $(0, 0)$ 到 $(1, 4)$ 之间的一段弧, (注: ds 表示弧元). (10 分)

12. 解方程 $2y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = 2xy \frac{dy}{dx}$. (10 分)

13. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解, 令

$w(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$, 证明

(1) $w(x)$ 满足方程 $w'(x) + p(x)w(x) = 0$,

(2) $w(x) = w(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t) dt\right)$. (12 分)