

苏州大学

2011 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 618 科目名称: 数学分析 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

(共四大题, 总分 150 分; 答案写在答卷纸上, 并请写明相应题号)

一、下列命题中正确的给予证明, 错误的举反例或说明理由. 共 6 题, 计 30 分.

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定收敛.
2. 设 $f(x), g(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续, 则 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上也是一致连续的.
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在 $(-1, 1)$ 上一致收敛.
4. 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续且无界, 则一定有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$.
5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b |f(x)| dx = 0$, 则 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$.
6. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

二、下列 4 题每题 15 分, 计 60 分.

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}$.
2. 计算 $\int_a^{a+1} (a+x)^2 (a-x)^{10} dx$.
3. 计算 $\iiint_V z^2 dx dy dz$, 其中 V 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ 所确定的立体.
4. 叙述欧拉积分 $\Gamma(s), B(p, q)$ 的定义, 并利用其相关结果证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

三、下列 2 题每题 15 分, 计 30 分.

1. (a) 给出没有最小正周期的非常值周期函数的例子;
(b) 证明如果周期函数 $f(x)$ 在某点 x_0 连续, 并且不是常值函数, 则 $f(x)$ 一定有最小正周期.
2. 讨论 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上是否存在最大值和最小值. 如果存在, 求出其值.

四、下列 3 题选做 2 题, 计 30 分.

1. (a) 证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx$ 条件收敛;
(b) 证明 $\left| \int_a^{+\infty} \sin(x^2) dx \right| \leq \frac{1}{a}, a \geq 1$.
2. 设一椭圆的半轴长为 a, b .
(a) 给出该椭圆的周长表达式;
(b) 当 $\frac{b}{a} \rightarrow 1$ 时, 问 $\pi(a+b)$ 与 $2\pi\sqrt{ab}$ 哪一个更接近于该椭圆的周长.
3. 设 $x \leq f_1(x) \leq \sqrt{x}, f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}, n = 2, 3, \dots, x \in [0, 1]$, 证明
(a) $\{f_n(x)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的一个单调有界函数数列;
(b) $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.