东南大学

二〇〇二年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

请考生注意：试题解答务请考生做在随试题发放的我校专用"答题纸"上！
做在其它答题纸上或试卷上的解答将被视为无效答题，不予评分。

试题编号：436　　试题科目：高等代数

一．以下结论是否成立，如成立，试证明．否则举反例．（每题4分，共24分）

1. 若 α 为 $f'(x)$ 的 k 重根，则 α 为 $f(x)$ 的 $k+1$ 重根．这里 $f'(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的微商（或导数）．
2. 设 A 为 $m\times n$ 阵，B 为 $n\times m$ 阵，且 $m>n$，则 $|AB|=0$
3. 若 A, B 均为 n 阶实对称阵，具有相同的特征多项式，则 A 与 B 相似．
4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$ 的秩为 3．
5. 设 V_1, V_2 均为线性空间 V 的子空间，满足 $V_1\cap V_2=\{0\}$，则 $V=V_1\oplus V_2$．
6. 设 A 为 n 阶正定阵，则一定存在正定阵 B，使 $A=B^2$．

二．（10分）已知线性方程组 $Ax=k\beta_1+\beta_2$，其中．

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

求 k，使方程组有解，并求有解时的通解．

三．（10分）已知 A 是 n 阶实对称阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，相对应的标准正交特征向量为 $\xi_1,\cdots,\xi_n$．求证．

$$A=\lambda_1\xi_1\xi_1^T+\cdots+\lambda_n\xi_n\xi_n^T$$

这里"T"表示转置．

四. 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在线性空间 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. 求值域 $\mathcal{A}V$，核 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的基.
2. 问 $V = \mathcal{A}V + \mathcal{A}^{-1}(0)$ 吗？为什么. (12分)

五. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$，$i=1,\cdots,n$. 求证

$A_{11}=A_{12}=\cdots=A_{1n}$.

这里 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 (10分)

六. 设 A 为 n 阶矩阵，试证 $A^2=A$ 的充要条件为

$r(A)+r(I-A)=n$.

这里 I 为 n 阶单位阵，$r(A)$ 表示 A 的秩. (12分)

七. 设 A 为 4 阶矩阵，且存在正整数 k，使 $A^k=0$，又 A 的秩为 3，分别求 A 与 A^2 的若当 (Jordan) 标准形. (10分)

八. 证明，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，并且 $f(x)$, $g(x)$ 次数都大于零，那么可以选取 $u(x)$, $v(x)$ 使 $\partial(u(x))<\partial(g(x))$, $\partial(v(x))<\partial(f(x))$，且有

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

并且这样的 $u(x)$, $v(x)$ 是唯一的.

这里 $\partial(f(x))$ 表示 $f(x)$ 的次数. (12分)