试题编号：317 试题名称：数学分析

东南大学

二〇〇二年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

请考生注意：试题解答务请考生做在随试题发放的我校专用“答题纸”上！做在其它答题纸上或试卷上的解答将被视为无效答题，不予评分。

试题编号：317 试题科目：数学分析

一. 叙述定义（5分+5分=10分）

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. 当 $x\to a^+$ 时，$f(x)$ 不以 A 为极限.

二. 计算（9分×7=63分）

1. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$，$0\le x\le\frac{1}{2}$ 的弧长.

2. 设 $u=f(x,y,z)$，$g(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，且已知 f 与 g 都具有一阶连续偏导数，$\frac{\partial g}{\partial z}\ne 0$，求 $\frac{du}{dx}$.

3. 求 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx$

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$，$(a>0)$

5. 计算第二型曲面积分

$$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$

其中 S 是曲面 $z=x^2+y^2$ 夹于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分，积分沿曲面的下侧.

6. 求常数λ，使得曲线积分

$$\oint_L \frac{x}{y} r^{\lambda} dx - \frac{x^2}{y^2} r^{\lambda} dy = 0 \quad , r=\sqrt{x^2+y^2}$$

对上半平面的任何光滑闭曲线L成立.

7. 在曲面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ $(x>0, y>0, z>0)$ 上求一点，使过该点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小.

三. 证明题（6分+7分+7分+7分=27分）

1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}dx$ 的敛散性.

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有二阶连续导数，且对一切 $x\in[0,2]$，均有 $|f(x)|\le 1$，$|f''(x)|\le 1$，证明对一切 $x\in[0,2]$，成立

$$|f'(x)|\le 2$$

3. 证明：积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

4. 证明：函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.