

试题编号: 433 试题名称: 高等代数

东南大学

二00三年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

请考生注意: 试题解答务请考生做在专用“答题纸”上!
做在其它答题纸上或试卷上的解答将被视为无效答题, 不予评分。

一、填空题(每小题6分, 共30分)

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 均为四维列向量, 且四阶行列式

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m, |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n.$$

则四阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, (\beta_1 + \beta_2)| =$ _____.

2. 已知 $\sigma = (1, 2, 3), \beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 设 $A = \sigma^T \beta$, 其中 σ^T 表示 σ 的转置, 则 $A^n =$ _____.

3. 设矩阵 A 的行列式因子为 $1, \lambda - 1, (\lambda - 1)^3$, 则 A 的初等因子为 _____, A 的若当标准形为 _____.

4. 设 V 是数域 P 上全体次数 < 4 的多项式与零多项式组成的线性空间, 且 $x^3, x^3 + x, x^2 + 1, x + 1$ 是 V 的一组基, 则 $x^2 + 2x + 3$ 在这组基下的坐标(写成行向量形式)为 _____.

5. $f(x) = x^5 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 的最大公因式 $(f(x), g(x)) =$ _____.

二、选择题(每小题6分, 共30分)

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有 ()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关; (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关;
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关; (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则 ()

- (A) 当 $m > n$ 时, $|AB| \neq 0$; (B) 当 $m > n$ 时, $|AB| = 0$;
(C) 当 $n > m$ 时, $|AB| \neq 0$; (D) 当 $n > m$ 时, $|AB| = 0$.

3. 设 n 阶矩阵 A 可逆 ($n \geq 2$), A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 ()

- (A) $(A^*)^* = |A|^{n+1}A$; (B) $(A^*)^* = |A|^{n-1}A$;
(C) $(A^*)^* = |A|^{n+2}A$; (D) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

4. 设 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, P 为三阶非零矩阵, 且满足 $PQ = 0$, 则 ()

- (A) 当 $t = 6$ 时, P 的秩必为 1; (B) 当 $t = 6$ 时, P 的秩必为 2;
(C) 当 $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 1; (D) 当 $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 2.

试题编号: 433 试题名称: 高等代数

5. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组 $Ax = b$ 的通解(一般解)必是 ()

(A) $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2)$; (B) $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2)$;

(C) $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2)$; (D) $\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2)$.

三、(20分) 设多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ 是整系数多项式, $a_n \neq 0$, p 是素数, 若 $p \mid a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, 但 $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0$, 求证 $f(x)$ 是有理数域上不可约多项式.

四、(12分) 设有 n 元实二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1 x_2)^2 + (x_2 + a_2 x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1} x_n)^2 + (x_n + a_n x_1)^2$, 其中 $a_i (i = 1, \cdots, n)$ 为实数, 试问: 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足何种条件时, 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型.

五、(18分) 设 V 是数域 P 上的一个 n 维线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 用 V_1 表示由 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 生成的线性子空间, 令

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \mid \sum_{i=1}^n k_i = 0, k_i \in P \right\}$$

(1) 证明 V_2 是 V 的子空间.

(2) 证明 $V = V_1 \oplus V_2$.

(3) 设 V 上线性变换 A 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵 A 是置换矩阵(即: A 的每一行与每一列都只有一个元素为 1, 其余元素全为 0), 证明 V_1 与 V_2 都是 A 的不变子空间.

六、(15分) 设 A 是 n 维线性空间 V 上可逆线性变换.

(1) 试证 A 的逆变换 A^{-1} 可表成 A 的多项式.

(2) 如令 $f(\lambda)$ 为 A 的特征多项式, 试证当多项式 $g(\lambda)$ 与 $f(\lambda)$ 互素时, $g(A)$ 是可逆线性变换.

七、(15分) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中两个向量组, 满足 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta_i, \beta_j \rangle, i, j = 1, \cdots, m$, 这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, 试证: 存在正交变换 A , 使 $A\alpha_i = \beta_i, i = 1, \cdots, m$.

八、(10分) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是 n 阶非零矩阵, 满足

$$A_i A_j = \begin{cases} A_j, & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时.} \end{cases}$$

证明: 每个 $A_i (i = 1, \cdots, n)$ 都相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$.