东 南 大 学

二00三年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

一、判断下列命题正误，若正确请证明，否则请给出反例说明（每题 8 分，共 32 分）

1. 若函数 f, g 均在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续，则它们的积 $f \cdot g$ 也在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续可微，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. 若对任意的自然数 p 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}) = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

4. 设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭长方型区域 D 上非负可积，且不恒为 0，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy > 0$.

二、计算题（每题 6 分，共 48 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$.

3. 设 $f(0) = 0$, $f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$ 求 $f(x)$.

4. 求积分 $\int_{-2}^{2} x^2 \left(\dfrac{\sin^3 x}{1+x^6} + \sqrt{4-x^2}\right) dx$.

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n$ 在 $x = -2$ 处条件收敛，求其收敛半径.

6. 求 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, \pi), \end{cases}$ 的 Fourier 展式.

7. 若函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $xy + yz + zx = 1$ 所确定，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

8. 求曲线积分 $\oint_L \dfrac{-(y-\frac{1}{2})dx + xdy}{x^2 + (y-\frac{1}{2})^2}$，其中 L 从 $A(1,0)$ 经上半单位圆周到 $B(-1,0)$，再经过直线段 BA 回到 A 点.

三、(10 分) 设 $x_1>0, x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

四、(12 分) 设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可微，且 $g'(x)\neq 0$. 求证存在一点 $c\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

五、(12 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & 当(x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 当x=y=0.\end{cases}$$

证明 f 在原点可微但偏导数不连续.

六、(12 分) 设函数 $u(x,y,z)$ 具有连续的二阶偏导数，S 是有界闭区域 Ω 的光滑边界曲面，记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，试证明：

(1) $\displaystyle\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_\Omega \Delta u\,dxdydz$，

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是函数 u 沿 S 的外法线方向的方向导数；

(2) 若在 Ω 内 $\Delta u=0$，且函数 u 在 S 上恒为 0，则在 Ω 内 $u\equiv 0$.

七、(12 分) 设 $J(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx\,(\alpha\geq 0)$. 证明 $J(\alpha)$ 可微并求出 $J(\alpha)$.

八、(12 分) 设 $\{\phi_n(x)\}$ 是 $[-1,1]$ 上的非负连续的函数列，且满足下列条件：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\phi_n(x)dx=1$.

(2) $\{\phi_n(x)\}$ 在 $[-1,1]\backslash\{0\}$ 上内闭一致收敛于零，即对任何 $0<c<1$，$\phi_n(x)$ 在 $[-1,-c]$ 及 $[c,1]$ 上一致收敛于零.

试证：对 $[-1,1]$ 上任意连续函数 $g(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}g(x)\phi_n(x)dx=g(0).$$