试题编号: 433　　试题名称: 高等代数

东 南 大 学

二00四年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

请考生注意: 试题解答务请考生做在专用"答题纸"上!
做在其它答题纸上或试卷上的解答将被视为无效答题，不予评分。

课程编号: 433　　课程名称: 高等代数

一. (18 分) 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0 \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, 试讨论 $a_1, \ldots, a_n$ 和 b 满足何种条件时,

(1) 方程组仅有零解,

(2) 方程组有非零解. 此时, 用基础解系表出所有解.

二. (17 分) 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(1) 求正交变换 $X=QY$ 把 f 化成标准形.

(2) 问 a 为何值时, f 的秩为 2? 此时, 求 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的解.

三. (15 分) 设 $a_1, \ldots, a_n$ 为互不相同的整数,

$$g(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1.$$

(1) 求证 $g(x)$ 在有理数域 Q 上不可约.

(2) 对于整数 $t\neq-1$, 问 $h(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+t$ 在有理数域 Q 上是否可约, 为什么?

四. (15 分) 设 f 为数域 P 上线性空间 V 上的线性变换, 多项式 $p(x)$, $q(x)$ 互素, 且满足 $p(f)q(f)=0$. 求证 $V=W\oplus S$ 且 W, S 为 f 的不变子空间, 这里 $W=K(p(f))$, $S=K(q(f))$, 其中 $K(g)$ 表示 g 的核.

五. (10 分) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为欧氏空间 V 的标准正交基，

$\alpha=\varepsilon_1-2\varepsilon_2$，$\beta=2\varepsilon_1+\varepsilon_3$，求正交变换 H，使 $H(\alpha)=\beta$.

六. (10 分) 设 A 为 n 阶方阵，求证存在正整数 m，使秩(A^m) = 秩(A^{m+1})，并证存在 n 阶矩阵 B，使 $A^m=A^{m+1}B$.

七. (15 分) 设 α，β 均为非零 n 维列向量，记 $A=\alpha\beta^T$.

(1) 求 A 的最小多项式.

(2) 求 A 的若当标准形.

八. (20 分) 设 V 是数域 P 上全体 2 阶矩阵所构成的线性空间，给定一矩阵 $A\in V$，定义 V 上的变换 δ 如下：

$$\delta X=AX,\quad \forall X\in V$$

(1) 证明：δ 为 V 上的一个线性变换.

(2) 取 V 的一组基 $e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，

 $e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，求 δ 在此组基下的矩阵.

(3) 求证如果 A 可相似对角化，则可找到 V 的一组基使 δ 在此组基下的矩阵为对角阵.

九. (15 分) 设 A, B 分别为 m 阶和 n 阶矩阵，求证 A, B 无公共特征值的充要条件为矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解.

十. (15 分) 设线性空间 V 的两组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$； $\beta_1,\cdots,\beta_n$.

(1) 求证对 $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$，$\exists\alpha_{j_i}\in\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，使 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1}$，$\alpha_{j_i}$，$\beta_{i+1},\cdots,\beta_n$ 为 V 的基.

(2) 如果 $n=3$，对 $\forall i\in\{1,2,3\}$，是否存在 $j,k\in\{1,2,3\}$，$j\neq k$，使 $\beta_i,\alpha_j,\alpha_k$ 为 V 的基，为什么?