南京大学1996年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 数学分析 得分

专 业：数学系各专业

(一) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{e}\right]^x$. (10分)

(二) 求 $I_n=\displaystyle\int\frac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ 的递推公式. (10分)

(三) 在收敛区间内求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的和函数. (10分)

(四) 当 $\alpha\geq\frac{1}{2}$ 时讨论 $E(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性. (10分)

(五) 对任意 $x_1, x_2\in[a,b]$ 都有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leq 8|x_1-x_2|,$$

且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ (10分)

(六) $z=z(x,y)$ 满足 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$，其中 $z(x,y)$，$F(u,v)$ 均可微，求 $z-xz_x-yz_y$. (10分)

(七) 求 $\displaystyle\oint_C\frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$，其中 C：$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的正向. (10分)

(八) 讨论 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x\,dx}{x^\alpha(\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}x)^\beta}$ 的敛散性. (10分)

(九). 讨论

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x^2+y^2}(x\sin y-y\cos y)+\dfrac{y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

的连续性. (10分)

(十). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\varphi(x)$ 在 $[a,b+d]$ 上可积 $(d>0)$ 则

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_a^b f(x)\varphi(x+\delta)\,dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

(10分)