南京大学1996 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 高等代数 得分

专 业：基础数学、运筹与控制论

1. 确定α的取值范围使$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$为正定实对称矩阵。 (20分)

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，求 $A^{10}+2A^8+3A^6+4A^4+5A^2+6E$ 的秩，其中 E 为3阶单位矩阵。 (20分)

3. 设L为n维复线性空间，$n<+\infty$，$f: L\to L$为线性空间同态（线性变换）。问：

(1) f为单同态（即 $\mathrm{Ker} f=0$）时，f是否一定为线性空间同构？为什么？

(2) f为满同态（即 $\mathrm{Im} f=L$）时，f是否一定为线性空间同构？为什么？ (20分)

4 设$d(x)$为实系数多项式$f(x)$与$g(x)$的最高公因式，A是实线性空间L到实线性空间L的同态（线性变换）。证明：

$$\mathrm{Ker}\, d(A)=\mathrm{Ker} f(A)\cap \mathrm{Ker}\, g(A),$$

其中 Ker 表示同态核。 (20分)

5. 设$S_1, S_2, \cdots, S_m$都是满秩的$n\times n$实对称矩阵，且它们中任意两个的积仍是对称矩阵。

(1) 证明 $S_iS_j=S_jS_i$，$1\leq i,j\leq m$；

(2) 回答：$S_1, S_2, \cdots, S_m$是否有公共的特征向量？并说明理由。 (20分)

是 $(G+H)^2=G+H$.（15分）

6. 设A为$n\times n$实对称不定矩阵，即总有$x_1, x_2\in R^n$，使得

$$x_1^TAx_1>0,\quad x_2^TAx_2<0,$$

试证明：总存在非零向量$x_0\in R^n$，使得$x_0^TAx_0=0$.

（10分）