南京大学1997年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 高等代数 得分______

专 业：______

一.（25分）. 设$\mathscr{A}$是数域F上三维线性空间V的线性变换（自同态），$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$是V的一组基，并且

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\mathscr{A}(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\mathscr{A}(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 .$$

1. 写出$\mathscr{A}$在基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$下的矩阵A.
2. 求一正交矩阵T使$T^{-1}AT$为对角形矩阵.

二.（15分）. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 求 A 的逆矩阵 A^{-1}.

2. 求 A 的特征多项式与最小多项式.

三.(20分). 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 求 A 的特征矩阵的所有不变因子以及所有初等因子.

2. 求 A 的若当标准形.

四.(20分). 设 F 为任一数域, $f(x)$ 是 F 上的一元多项式, 其首项系数为 a, 次数为 n. 证明: $f'(x)\mid f(x)$ 当且仅当存在 $b\in F$ 使得 $f(x)=a(x-b)^n$, 其中 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数, $f'(x)\mid f(x)$ 表示 $f'(x)$ 整除 $f(x)$.

南京大学1997年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 高等代数 得分

专 业：

五．（10分）．设A为2级方阵，若存在矩阵B使得$A+AB=BA$，证明：$A^2=0$．

六．（10分）．设k为实数，α为实数域上的n维行向量，并且$1+k\alpha\alpha'>0$．证明：n级矩阵$E_n+k\alpha'\alpha$为实正定矩阵，其中E_n表示n级单位矩阵，α'表示α的转置．