南京大学 1999 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 数学分析　　　　得　分

专　　业：基础数学、计算数学、应用数学
运筹学与控制论

一.（8分）$a_1=a$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{A}{a_n}\right)$　$n=1,2,\cdots$，a、$A>0$，
证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

二.（8分）求 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$.

三.（8分）求 $\iint\limits_{(S)}|xyz|\,dS$，其中 (S) 为由曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部份.

四.（10分）求 $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$，$(x>0)$.

五.（8分）讨论 $\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)dx$ 的敛散性.

六.（8分）求 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x^2-y^2)^p\,dx\,dy$，$(p\in N)$.

七.（10分）$\{x_n\}$ 为正的有界数列，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$.

八.（10分）在抛物体 $D:\begin{cases}x^2+y^2\le 2z\\ z\le 4\end{cases}$ 内作一内接长方体，使各侧面平行于坐标面，求这些长方体的最大体积，及这时三边之长.

九.（10分）讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 在 $\frac{1}{2}\le x\le 2$ 内的一致收敛性.

十.（10分）$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$

$=0$，在 b，a 两点的左右导数满足 $f'_-(b)\cdot f'_+(a)>0$，证明在 (a,b) 内 $f(x)$ 至少有二根.

十一 (10分) $f(x)$ 为定义于有界集 D 上的无界函数，证明 $f(x)$ 在 D 上不一致连续.