南京大学 1998 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 高等数学 得分 ______

专业：城市资源学系地理学各专业

一、填空题（每小题4分，共36分，答案写到答卷纸上）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}=$ ____.

2. $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 ____.

3. $y=x^x$，$dy=$ ____.

4. $\int_1^4\dfrac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx=$ ____.

5. $\int_0^{+\infty}e^{\frac{x}{1+x}}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}dx=$ ____.

6. $z=e^x\cos(x-y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ____.

7. 交换积分次序 $\int_0^1dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy=$ ____.

8. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{e}-1}{n^\alpha}$ 收敛，则 α 的取值范围为 ____.

9. $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$A^{-1}=$ ____.

二、计算题（每小题6分，共30分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+\ln(1+x^3)}{\tan^3 x}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$b>a>0$，试求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{ax}^{bx}\dfrac{f(x)}{x}dx$.

3. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

4. 设 $z=xyf(\frac{x}{y},\frac{y}{x})$，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. $\iint\limits_D y^2\sin xy\,dxdy$，D由 $y=x, x=0, y=1$ 所围区域.

三.(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=f(1)=0$，
$F(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$. 1) 求 $\int_0^1 F(x)dx$;
2) 求证 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个零点;
3). 求证存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

四 (8分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的收敛域与和函数.

五 (8分)
$$\begin{cases} x+2y-z=2, \\ x+4y+(7-\alpha)z=\beta, \\ x+2y+\alpha z=2+\beta. \end{cases}$$
试分别求 α,β 的值，使得方程组有唯一解，无解，无穷多解；当方程组有无穷多解时，求其通解.

六 (10分). 求微分方程 $y''+2y'=\frac{1}{2}\sin 2x+\cos^2 x$ 的满足初值条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的特解.（完）