

南京大学 1999 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目 高等数学 甲 得分

专 业: 自然地理学, 人文地理学, 地图学与地理信息系统,
第四纪地质学, 城市规划与设计, 环境科学.

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 36 分) (答案另写到答卷纸上).

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \sqrt{1 - x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $y = \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$ 的渐近线有 一条, 它们的方程为 .

3. $y = 2^{\arctan^2 \frac{1}{x}}, \quad y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $F(x) = \int_0^x f(x+t) dt, \quad f(u)$ 连续, $F'(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 函数 $u = xy + z^2$ 在点 $P_0(1, 2, 3)$ 处沿指向点 $P(2, 1, 2)$ 方向的方向导数为 .

6. $u = f(x, y, z), \quad y = \varphi(x), \quad z = \psi(x, y), \quad f, \varphi, \psi$ 皆可微, 则全导数 $\frac{du}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 函数 $y = \arctan x$ 的幂级数展开式为 .

9. 设微分方程 $y'' + y' + ky = 3e^x$ 有特解 $y = xe^x$, 则该微分方程的通解为 .

二. 计算下列各题 (每小题 6 分, 共 24 分).

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x - \sin x}$

2. $\int \frac{x^3}{(1-x^2)^2} dx$

3. $\int_0^1 e^{-2x} (1 - \tan x)^2 dx$

4. 求柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 介于锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 xy 平面之间的部分曲面的面积.

三. (8 分). 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, 求证: 存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi \neq \eta$, 使得

$$\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 1.$$

四. (8 分). 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

试讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的连续性, 可偏导性, 可微性.

五. (8 分). 设椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在其上点 $P(x, y, z)$ 处的切平面为 Π , 点 P 到 Π 的距离为 ρ , 试用奥氏公式计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} \rho dS$.

六. (8 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

七. (8 分) 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = e^x y^{-1}$ 的通解.