

南京大学1996 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目 数学分析和高等代数 得分

专 业: 软件 理论, 应用, 结构

一. 每题 5 分 共 60 分

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在

试证 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 不存在

(2) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + 1000^n}$$

(3) 已知 $f(x) = \frac{\varphi(x) - \cos x}{x}$ 在 $x=0$ 连续

$\varphi(x)$ 可导, $\varphi'(0)$ 存在 且 $\varphi(0)=1$

求 $f'(0)$

(4) 已知 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$
且 $f(0)=1$, 满足 $x f''(x) + (1-x) f'(x) + 3f(x) = 0$

求 $f(x)$

(5) 求 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

(6) 证明 $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} \quad a^2 + b^2 \neq 0$ 时

可表示为 $Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C$
的形式。

(7) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$

(8) 已知 $y=f(x)$ 是单调函数, $f'(x) \neq 0$, 并有
 $x=\varphi(y)$

试用 $f(x)$ 及其导函数来表达 $\varphi''(y)$.

(9) 已知 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,
在 (a, b) 内可导, 试证明至少存在
一点 $\xi \in (a, b)$ 满足

南京大学1996 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目 数学分析和高等代数 得分 _____

专 业: 软件, 理论, 应用, 结构

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \\ f'_1(\xi) & f'_2(\xi) & f'_3(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

(10) A, B 是 n 阶方阵, λ 是 AB 的非零特征值, 试证 λ 也是 BA 的特征值.

(11) 证 $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sin mx \cdot \cos ny \, dx \, dy = 0$

其中 m, n 是自然数.

(12) 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 $A \neq E$, 试证 $|A| = 0$

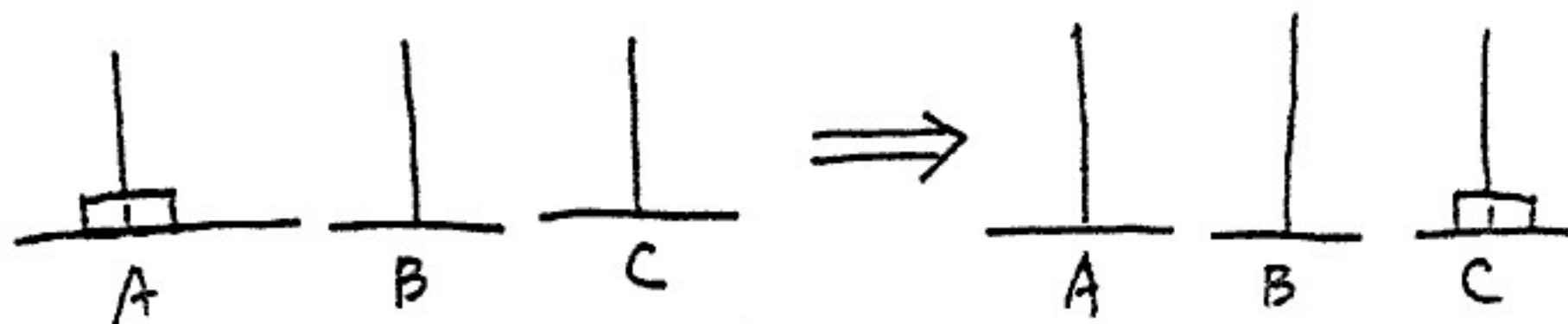
二. 每题10分, 共40分

1. 有三个柱子 A, B, C; A柱上套有小到大的 n 个盘子 (大在下), 把一个盘子移到另一个柱子上算搬动一次, 但始终不允许一个柱子上出现大盘子在小盘子上面的情况; 设把 n 个盘子从 A 柱全部移到 C 柱上需要的搬动次数为 h_n

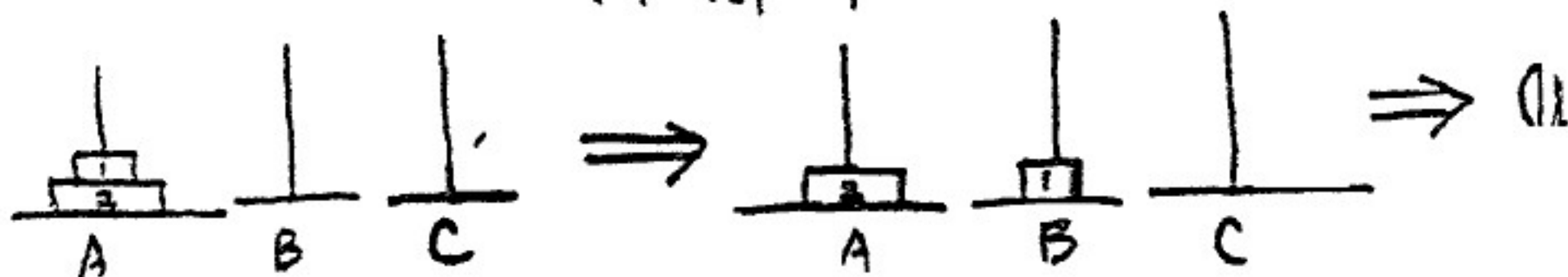
试求

$$H(x) = h_1x + h_2x^2 + \dots + h_nx^n + \dots$$

例如 $n=1$ 和 2 的搬动情况如下



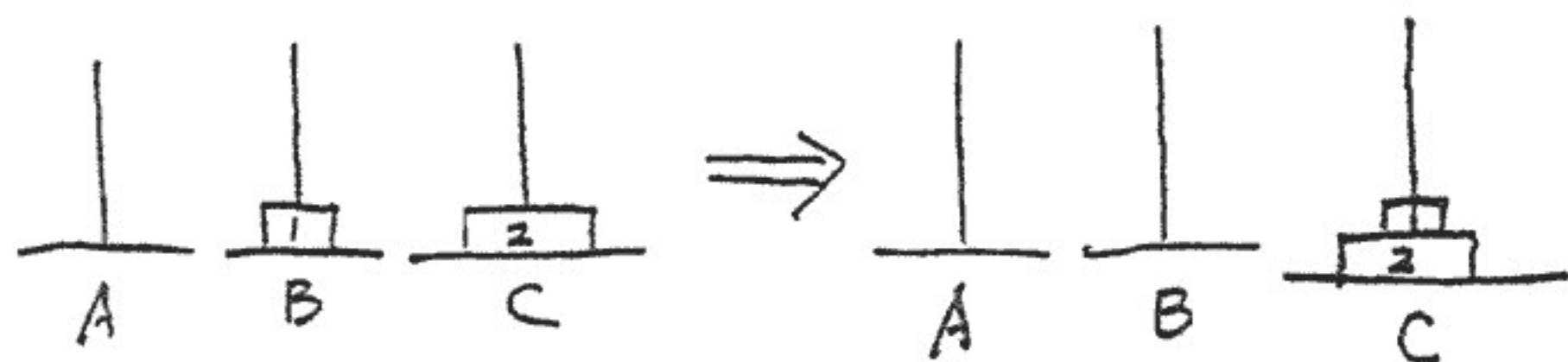
$$\therefore h_1 = 1$$



南京大学1996年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目 数学分析和高等代数 得分

专 业: 软件, 理论, 应用, 结构



$$\therefore h_2 = 3$$

2. 二位十进制数可以表示 $0 \sim 99$ (即 10^2) 个数, 每个数位上都能用到 10 个数字, 如果把每个数字看作一个元素, 那么相当于在十进制计数中, 用 20 个元素可以计数 10^2 个, 如果把这 20 个元素用于二进制, 相当于可以组成 10 位二进制数, 即计数的范围就可能扩大到 $(2^{10} = 1024)$ 个, 即 $0 \sim 1023$. 假设允许合理地选取元素总数 N (常量) 在 N 确定的前提下, 试探讨一下取何种进制 (又进制) 能使用的计数范围最大呢?

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} \sin(x^2+y^2) & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

试讨论 ① $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 是否连续;

② $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 一阶偏导数是否存在

③ $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 是否可微.

4. ① 计算 $I = \int_0^1 x|x-\alpha|dx$, 其中 α 是参数

② $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, $f(0) = f(2a)$

试证在 $[0, a]$ 上至少存在一点 ξ , 使

$$\text{证 } f(\xi) = f(\xi+a)$$